Algorithmen

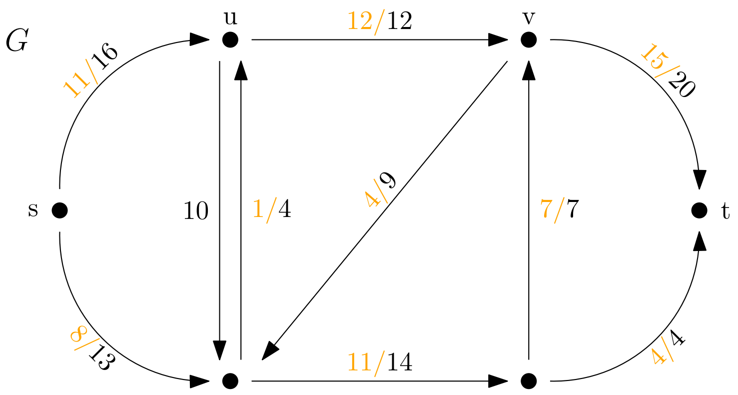
Mitschrift von Thomas Battermann
Dozent: Prof. Thomas Thierauf

4. Semester

Inhaltsverzeichnis

List of Algorithms

1 Flüsse in Netzwerken



Ein Flussnetzwerk besteht aus einem gerichteten Graph $G = (V, E)$ und einer Kapazitätsfunktion $c : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $c(u, v) \geq 0 \forall u, v \in V$ und $c(u, v) = 0$, falls $(u, v) \notin E$.
Außerdem seien $s \neq t \in V$ 2 ausgezeichnete Knoten. Dabei liege jeder Knoten auf einem Weg von s nach t.

Ein Fluss (im Netzwerk) ist eine Funktion $f : V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Kapazitätsbedingung: $f(u, v) \leq c(u, v) \forall u, v \in V$
2. Symmetriebedingung: $f(u, v) = -f(v, u) \forall u, v \in V$
   Ein Fluss von z. B. 12 von u nach v ist auch ein Fluss von -12 von v nach u.
3. Kirchhoffsches Gesetz:
   $\forall u \in V - \{s, t\}$
   $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$
   Bsp.: $v : 12 + (-11) + (-1) = 0$

1.1 Wert des Flusses

Der Wert des Flusses f ist $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$
Kurzschreibweise sei $X, Y \subseteq V$
dann Def. $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$

Maximaler Fluss berechnen:

Gegeben: $G = (V, E),\ s, t \in V, c$
Gesucht: Fluss f, so dass $|f|$ maximal ist.

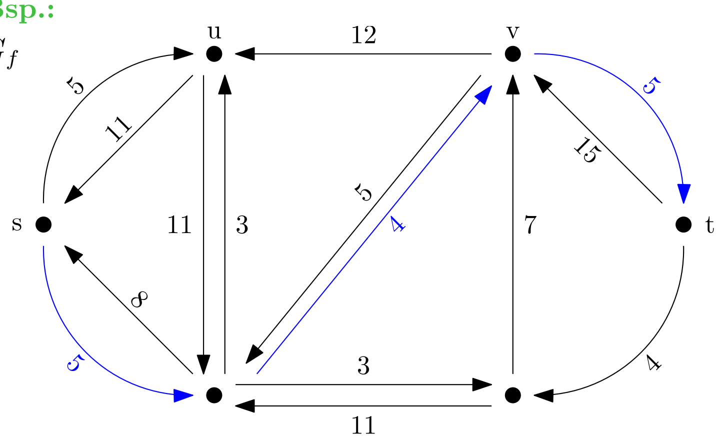
Ist $(u, v) \notin E$ und $(v, u) \notin E$, dann ist $c(u, v) = c(v, u) = 0$.
Für f muss also gelten:

- $f(u, v) \leq 0$ und $f(v, u) \leq 0$
- $f(u, v) = -f(v, u) \Rightarrow f(u, v) = f(v, u) = 0$

1.2 Restnetzwerk

Sei f ein Fluss in G. Die Restkapazität der Kante (u,v) ist $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Das Restnetzwerk von G bzgl. f ist $G_f = (V, E_f)$ mit $E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$.

Bsp.:
G_f



Sei p Weg von s nach t in G_f die Restkapazität von p in G_f
$c_f(p) = min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\}$
Im **Bsp.:** $c_f(p) = 4$

> Definiere f_p:
> $$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{, falls } (u,v) \in p \\ -c_f(p) & \text{, falls } (v,u) \in p \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

f_p ist Fluss:

1. Kapazitätsbedingung:
   Für $(u,v) \in p$ ist $f_p(u,v) = c_f(p) \leq c_f(u,v)$ nach Definition von $c_f(p)$
2. Symmetrie gilt nach Definition
3. Kirchhoffsches Gestz: Sei u Knoten auf p
   $\overset{p}{\rightsquigarrow} v \longrightarrow u \longrightarrow w \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} f(u,v) &= f(v,u) + f(u,v) + f(u,w) + f(w,u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wert $|f_p| = c_f(p)$ (Im **Bsp.:** $= 4$)

Lemma: Sei f Fluss in G und f' Fluss in G_f. Dann ist $f + f'$ ein Fluss in G und der Wert $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Beweis:

1. Symmetrie

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &= -f(v,u)-f'(v,u)\\ &= -\big((f+f')(v,u)\big)\end{aligned}$$

2. Kapazität

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+\underbrace{f'(u,v)}_{\le c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)}\\ &\le f(u,v)+c(u,v)-f(u,v)\\ &= c(u,v)\end{aligned}$$

3. Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f+f')(u,v) &= \sum_{v\in V}\big(f(u,v)+f'(u,v)\big)\\ &= \sum_{v\in V} f(u,v)+\sum_{v\in V} f'(u,v)\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert:}|f+f'| &= \sum_{v\in V}(f+f')(s,v)\\ &= \sum_{v\in V} f(s,v)+\sum_{v\in V} f'(s,v)\\ &= |f|+|f'|\end{aligned}$$

1.3 Ford-Fulkerson-Methode

Algorithm 1 FORD-FULKERSON-METHODE (G, s, t, c)

$f \leftarrow 0$
while es gibt einen Erweiterungspfad p in G_p **do**
    erhöhe den Fluss um f_p
end while
return f

Genauer:

Algorithm 2 FORD-FULKERSON (G, s, t, c)

for all $(u, v) \in E$ **do**
    $f(u, v) \leftarrow 0$
    $f(v, u) \leftarrow 0$
end for
while Es gibt einen Weg p von s nach t in G_f **do**
    $G_f(P) \leftarrow min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in P\}$
    for all $(u, v) \in P$ **do**
        $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(P)$
        $f(v, u) \leftarrow -f(u, v)$
    end for
end while