Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Mitschrift von Thomas Battermann

3. Semester

Inhaltsverzeichnis

Statistik:

- beschreibende Statistik
  → Erfassung, Auswertung von Daten.
  (z. B. über Mittelwerte)
  - oftmals keine Gesamterhebung (z. B. Wahl)
  - sondern Stichproben (z. B. Hochrechnung, Umfragen vorab)
    Auswahl:
    - Zufällig
      Qualitätstests
    - gezielt (Repräsentative Stichprobe)
      z. B. Hochrechnung der Wahl
- beurteilende Statistik
  - Rückschlüsse von Stichproben auf die Gesamtheit
  - Tests →

  → Zufallseffekte

  → Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel

1 Grundbegriffe

1.1 Zufallsexperimente

- Mehrere mögliche Ergebnisse
  Bsp.: Würfeln → 1,2,3,4,5,6
- prinzipiell beliebig oft wiederholbar
- für die Ergebnisse lassen sich Wahrscheinlichkeiten angeben
  → jeweils $\frac{1}{6}$

Überprüfung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe häufiger Wiederholungen des Experiments.
Bsp.: 1000 maliges Würfeln → 160mal 1, 168mal 2, ...
Schätzwert für die W.: $\frac{160}{1000} = 0,16$ = relative Häufigkeit
absolute Häufigkeit der 1 = 160

Man erhält W. aus den relativen Häufigkeiten, wenn die Anzahl der Wiederholungen gegen ∞ geht.
W. für die 1 = $0.1\overline{6}$

1.2 Begriffe, Bezeichnungen:

Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$

Ergebnismenge: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignisse: $A, B, C, \dots$ sind Teilmengen von Ω
meist zunächst verbal formuliert
A: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.
$\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse und die Ereignisse.
$P(\omega_1), P(\omega_2), \dots$ und $P(A), P(B), \dots$ (P für probalby)
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$ (Lauter gleiche W. (Gleichverteilung))
$P(a) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

Bsp.: 2maliges Würfeln
A: im 1. Wurf kommt 5
B: Summe der Augen ist 7
gesucht: $\Omega, P(A), P(B)$

$\Omega = \{11, 12, , 21, 13, 31, \dots, 66\}$ W. jeweils $\frac{1}{3}6$
$A = \{51, 52, 53, 54, 55, 56\}$
$B = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
$P(A) = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{1}{6}$

C: Summe der Augenzahlen ist 12
$C = \{66\}$ $P(C) = \frac{1}{36}$

Bsp.: 3-maliger Münzwurf
Mit welcher w.
(a) tritt keinmal Wappen auf?
(b) tritt genau zweimal Wappen auf?

$\Omega = \{ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, ZWW, WWW\}$
$P(A) = \{ZZZ\} = \frac{1}{8}$
$P(B) = \{ZWW, WZW, WWZ\} = \frac{3}{8}$

1.3 Eigenschaften, Rechenregeln für W.

$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$, für jedes Ereignis A: $0 \leq P(A) \leq 1$

Ereignis A $\rightarrow$ Gegenereignis (Komplement) von A: $\overline{A} = A^C$ mit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Schnitt von Ereignissen A und B: $A \cap B$

Vereinigung von Ereignissen A und B: $A \cup B$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wenn A und B disjunkt sind, dann ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P(entweder A oder B)) $P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$ $(= P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)))$

Allgemeiner:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\
& + P(A \cap B \cap C) \\
& - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)
\end{aligned}
$$

Allgemein (Siebformel oder Inklusions-Exklusions-Methode):

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\
=&P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \\
&- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) - \\
&+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots \\
&\ldots \\
&+ (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}$$

Bsp.: 100 maliges Würfeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt $\rightarrow 6^{100}$ mögliche Ergebnisse

(a) 100 mal 5 auf? $\frac{1}{6^{100}}$

(b) keine 5 auf? $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$

(c) mindestens eine 5 auf? $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$ $\rightarrow$ Über Gegenereignis (b).

(d) genau eine 5 auf? $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99} \cdot 100$

2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Kombinatorik

Für ein Ereignis A, das Teilmenge von Ω ist.
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$ Elemente von Ω = Anzahl aller möglichen Ergebnisse
Nur wenn alle Ergebnisse aus Ω gleich Wahrscheinlich sind. ansonsten: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$

Berechnung von $|A|$ und $|\Omega|$ mit der Kombinatorik.

Kombinatorik:
k-maliges Ziehen aus n Kugeln.
Ziehen mit oder ohne Zurücklegen.
mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Bsp.: Lotto $k = 6$ aus $n = 49$. Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge.

4 Fälle:

1. Fall: Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge:
   n^k Möglichkeiten gesamt: $|\Omega| = n^k$ Möglichkeiten

2. Fall: Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge:
   $\frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$

Bsp.: Ein 5 stelliger Code wird zufällig zufällig gewählt, bestehend aus Ziffern $1, 2, \ldots, 9$.
$k = 5; n = 9$ Gesamt: $n^k = 9^6$ Möglichkeiten
Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) tritt die Kombination 13758 auf?
$\frac{1}{9^5}$

(b) enthält der Code lauter gleiche Zahlen?
$\frac{9}{9^5} = \frac{1}{9^4}$

(c) enthält der Code lauter verschiedene Zahlen?
$\frac{9!}{4!*9^5}$

(d) beginnt der Code mit 3?
$\frac{1*9^4}{9^5} = \frac{1}{9}$

(e) enthält der Code genau eine 3?
$\frac{1}{9} * \left(\frac{8}{9}\right)^4 * 5 = \frac{5*8^4}{9^5}$

(f) enthält der Code genau zwei 3er?
$\left(\frac{1}{9}\right)^2 * \left(\frac{8}{9}\right)^3 * 2 * 5 = \frac{10*8^3}{9^5}$

3. Fall: Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge.
$\rightarrow$ Aus n Kugeln werden k ausgewählt.
Vergleich mit 2. Fall: Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge
$\rightarrow n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten
Es gibt $k!$ Möglichkeiten, k Kugeln zu Vertauschen (auf k Plätzen).
im 3. Fall:
gesamt: $\frac{n!}{(n-k)!*k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
im Beispiel von Oben (f).
Mögl. aus 5 Plätzen 2 Stück für die 3er auszuwählen:
$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!*(5-2)!} = \frac{5*4*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}}{2*1*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}} = 10$
Bsp.: Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei 100 maligem Würfeln genau 20 mal die 4 auf?
$W = \frac{\binom{100}{20}*5^{80}}{6^{100}}$

Bsp.: Lotto 6 aus 49
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für

(a) 6 Richtige
$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$ 14 Mio. Möglichkeiten

(b) 4 Richtige
$\frac{\binom{6}{4}*\binom{43}{2}}{\binom{6}{49}} = \frac{645}{665896} \approx 0.096861972440140803\%$

(c) 3 Richtige
$\frac{\binom{6}{3}*\binom{43}{3}}{\binom{6}{49}} = \frac{8815}{499422} \approx 1.765040386687010184\%$

Bsp.: Kiste mit 4 blauen, 3 roten, 8 gelben Laptops
Wir wählen zufällig 8 aus.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 3 blau und 5 gelb?
$\frac{\binom{4}{3}*\binom{3}{0}*\binom{8}{5}}{\binom{15}{8}} = \frac{224}{6435}$

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 6 gelb
$\frac{\binom{8}{6}*\binom{7}{2}}{\binom{15}{8}} = \frac{196}{2145}$

Bsp.: Kiste wie in vorigem Beispiel. Wir stellen 2 Pakete mit jeweils 4 Laptops zusammen (zufällig).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit $\rightarrow \binom{15}{4} * \binom{11}{4}$

(a) enthält das 1. Paket 1 blauen und das 2. Paket 2 blaue Laptops?

(b) enthält das 1. Paket 1 blauen Laptop?

(c) enthält das 2. Paket 1 blauen Laptop?

(d) enthält das 1. oder 2. Paket 1 blauen Laptop?

(e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das 2. Paket 1 blauen Laptop, wenn man weiß, das im 1. Paket 2 blaue Laptops sind?

Lösung:

(a) $\frac{\binom{4}{1}*\binom{11}{3}*\binom{3}{2}*\binom{8}{2}}{\binom{15}{4}*\binom{11}{4}} \approx 0.12307692307692307692$

(b) $\frac{\binom{4}{1}*\binom{11}{3}*\binom{11}{4}}{\binom{15}{4}*\binom{11}{4}}$

(c) $\frac{\binom{4}{1}*\binom{11}{3}*\binom{11}{4}}{\binom{15}{4}*\binom{11}{4}}$

(d) Ereignis A: 1. Paket enthält 1 blauen Laptop
Ereignis B: 2. Paket enthält 1 blauen Laptop
gesucht: $A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$2 * \frac{\binom{4}{1}*\binom{11}{3}}{\binom{15}{4}} - \frac{\binom{4}{1}*\binom{11}{3}*\binom{3}{1}*\binom{8}{3}}{\binom{15}{4}*\binom{11}{4}}$
Man sieht hier: $P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$

(e) $\frac{\binom{2}{1}*\binom{9}{3}}{\binom{11}{4}}$

4. Fall: Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge.
$\rightarrow$ ungeeignet für Wahrscheinlichkeitsrechnungen.
Bsp.: 2 maliges Würfeln
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt keine 5 auf?
im 4. Fall: $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),\dots(6,6)\}$; $|\Omega| = 21$
Formal für die Anzahl der Ergebnisse in Ω:
$\Omega = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{6!} = \frac{7*6}{2} = 21$ Problem: Ergebnisse sind nicht gleich Wahrscheinlich
$\rightarrow$ 4. Fall: blöd!
$\rightarrow$ statt dem 4. Fall wird der 1. Fall betrachtet: Ziehen mit Zurücklegen und mit Reihenfolge
$\rightarrow |\Omega| = n^k$
im **Bsp.:** $P(\text{keine } 5) = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$

Bsp.: $k = 40$ Personen
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag?
$n = 365$ Kugeln; $k = 40$ maliges Ziehen
Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge $\rightarrow$ 1. Fall: $|\Omega| = n^k = 365^{40}$
P(mindestens 2 haben am gleichen Tag Geburtstag)
$= 1 - P$(alle haben an verschiedenen Tagen Geburtstag)
$= 1 * \frac{365^{40}}{365^{40}} \approx 89.123\%$

<u>Binomialkoeffizient/Multinomialkoeffizient</u>

Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k auszuwählen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$
Allgemeiner:

Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k_1 auszuwählen, aus den restlichen dann $k_2, \ldots, k_l$
$\binom{n}{k_1} * \binom{n-k_1}{k_2} * \binom{n-k_1-k_2}{k_3} * \ldots * \binom{k_l}{k_l}$

$= \frac{n!}{k_1! * (n-k_1)!} * \frac{(n-k_1)!}{k_2! * (n-k_1-k_2)!} * \frac{(n-k_1-k_2)!}{\ldots} * \ldots * \frac{k_l!}{k_l! * 0!}$

$$= \underbrace{\frac{n!}{k_1! * k_2! * \ldots * k_l!}}_{\text{Multinomialkoeffizient}}$$

wobei $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$

$n!$ = Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Elemente zu vertauschen

$\frac{n!}{k_1! * k_2! * \ldots * k_l!}$ = Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente zu vertauschen, bei denen k_1 von der Sorte 1 sind, k_2 von der Sorte 2, ..., k_l von der Sorte l.

Bsp.: MISSISSIPPI → Wie viele verschiedene Wörter erhält man durch vertauschen?
$\frac{11!}{1! * 4! * 4! * 2!}$

Sorte 1: M: $k_1 = 1$
Sorte 2: I: $k_2 = 4$
Sorte 3: S: $k_3 = 4$
Sorte 4: P: $k_4 = 2$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Bsp.: 2 rote Bälle und ein gelber Ball. Wir ziehen 2 Bälle ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) ist der 1. Ball rot?
$\frac{2}{3}$

(b) ist der 2. Ball rot?
$\frac{2}{3}$

(c) sind beide Bälle rot?
$\frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

(d) ist der 2. Ball rot, wenn man weiß, dass der 1. Ball rot ist?
$\frac{1}{2}$

mit Ereignissen formuliert:

A: 1. Ball ist rot

B: 2. Ball ist rot

(a) $P(A) = \frac{2}{3}$

(b) $P(B) = \frac{2}{3}$

(c) $P(A \cap B) = \frac{2}{4} * \frac{1}{3}$
Man sieht: $P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$, denn A und B sind abhängig.
$P(A \cap B) = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = P(A) * P(B \mid A)$

(d) bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B \mid A) = \frac{1}{2} \neq P(B)$, denn A und B sind abhängig.

Definition 1. *Für 2 Ereignisse A und B ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A*
$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ *(wenn* $P(A) \neq 0$*)*

Definition 2. *umgestellt zur Berechnung von* $P(A \cap B)$*:*
$P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A) = P(B) * P(A \mid B)$ → *gilt immer*

Definition 3. *2 Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn* $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$*.*
bzw. wenn $P(B \mid A) = P(A)$
bzw. wenn $P(A \mid B) = P(B)$
→ *nur bei unabhängigen Ereignissen.*

3.1 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

wenn $P(A \mid B)$ und $P(A \mid \overline{B})$ bekannt sind.
$P(A) = P(A \mid B) * P(B) + P(A \mid \overline{B}) * P(\overline{B})$

Anwendung des Satzes für (b):
$$P(\underbrace{B}_{\text{2. Ball rot}}) = \underbrace{P(B \mid A)}_{\frac{1}{2}} * \underbrace{P(A)}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{P(B \mid \overline{A})}_{1} * \underbrace{P(\overline{A})}_{\frac{1}{3}}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit Allgemeiner:

Ist $\omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K$ Zerlegung von ω in disjunkte B, d. h. $B_i \cap B_j = \emptyset$
dann gilt: $P(A) = P(A \mid B_1) * P(B_1) + P(A \mid B_2) * P(B_2) + \ldots P(A \mid B_K) * P(B_K)$

Bsp.: Datenübertragung über 2 Kanäle (alternativ).
95% der Daten, die über Kanal 1 übertragen werden, kommen korrekt an.
90% der Daten, die über Kanal 2 übertragen werden, kommen korrekt an.
40% der Daten werden über Kanal 1 übertragen, 60% über Kanal 2.

(a) Wie viel Prozent der Daten werden über Kanal 1 übertragen und kommen korrekt an?
Formulierung mit Ereignissen:
A: Daten werden über Kanal 1 übertragen
B: Daten kommen korrekt an.
gegeben: $P(A) = 0,40; P(B \mid A) = 0,95; P(B \mid \overline{A}) = 0.90$
Gegenteile: $P(\overline{A}) = 0,60; P(\overline{B} \mid A) = 0.05; P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.10$
gesucht: $\underbrace{P(A)}_{0,4} * \underbrace{P(B \mid A)}_{0,95} = 0,38 = 38\%$

(b) Wie viel Prozent der Daten werden über Kanal 1 übertragen und kommen nicht korrekt an?
$P(A \cap B) = \underbrace{P(\overline{B} \mid A}_{=0,05} * \underbrace{P(A)}_{0,4} = 0,02 = 2\%$

(c) Wie viel Prozent der Daten kommen korrekt an?
$P(B) = \underbrace{P(B \mid A)}_{0,95} * \underbrace{P(A)}_{0,4} + \underbrace{P(B|\overline{A})}_{0,9} * \underbrace{P(\overline{A})}_{0,6} = 0,92 = 92\%$

(d) Wie viel Prozent der Daten kommen nicht korrekt an, wenn man weiß, dass sie über Kanal 1 übertragen wurden?
$P(\overline{B} \mid A) = 0,05 = 5\%$

(e) Wie viel Prozent der Daten kommen korrekt an oder werden über Kanal 1 Übertragen?
$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \overset{(c)(a)}{=} 0,92 + 0,4 - 0,38 = 0,94 = 94\%$

(f) Wie viel Prozent der Daten, die korrekt ankommen, wurden über Kanal 1 übertragen?
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{(c)}{\overset{(a)}{=}} \frac{0,38}{0,92} = 0,413 = 41,3\%$

Im vorigen Beispiel:
A und B sind abhängig, da $\underbrace{P(B \mid A)}_{0,95} \neq \underbrace{P(B \mid \overline{A})}_{0,9}$

Bsp.: Datenübertragung:
1% der gesendeten 1en kommt als 0 an.
2% der gesendeten 0en kommt als 1 an.
30% der gesendeten Daten sin 0en.

(a) Wie viel Prozent der Daten sind 0en, die als 1 ankommen?
$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \mid A) * P(A) = 0,02 * 0,3 = 0,006 = 0,6\%$

(b) Wie viel Prozent der ankommenden 0en sind 1en, die gesendet wurden?
$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|\overline{A}) * P(\overline{A})}{P(B)}$

(c) Wie viel Prozent der Daten werden Fehlerhaft übertragen?
$\underbrace{P(A \cap \overline{B})}_{=0,6\%} + \underbrace{P(\overline{A} \cap B)}_{=0,7\%} = 1,3\%$

Ereignisse:

A: 0 wird gesendet

B: 0 kommt an

Gegeben: $P(B \mid \overline{A}) = 1\%; P(\overline{B} \mid A) = 2\%; P(A) = 30\%$

Bsp.: (zu bedingten Wahrscheinlichkeiten).
2 maliges Würfeln
Ereignisse:

A: 1. Wurf ergibt 4

B: Summe der Augenzahlen ist 12

C: Summe der Augenzahlen ist 7

D: 2. Wurf ergibt 3

Sind A und B bzw. A und C bzw. A und D bzw. A C und D unabhängig?
A und B sind Unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$P(A) = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{1}{36}$
$P(C) = \frac{1}{6}$

$P(D) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = 0 \neq \frac{1}{216} = P(A) * P(B)$
A und B sind abhängig.

$A \cap C = \{43\}$
$P(A \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = P(A) * P(C)$
A und C und unabhängig

$A \cap D = \{43\}$
$P(A \cap D) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * P(A) * P(D)$ A und D und unabhängig

$A \cap D = \{43\}$
$P(A \cap D) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = P(A) * P(D)$
$A \cap C \cap D = \{43\}$
$P(A \cap C \cap D) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = P(A) * P(C) * P(D)$
A, C und D sind abhängig

Zusatzfragen:

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das der 1. Wurf 3 ist A, wenn die Summe der Augenzahlen 6 ist B?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) einer der Würfe 3 ist C, wenn die Summe der Augenzahlen 6 ist B?

$B = \{15, 24, 33, 42, 51\}$

$P(A) = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{5}{36}$
$P(C) =$

(a) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$

(b) $P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$

Oder direkt:

1. $P(A \mid B) = \frac{1}{5}$
   Bedingung $B = \{15, 24, \underline{3}3, 42, 51\}$

2. $P(C \mid B) = \frac{1}{5}$
   Bedingung: $B = \{15, 24, \underline{33}, 42, 51\}$

Formeln

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$\rightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) * P(B) = P(B \mid A) * P(A)$ gilt immer
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ nur wenn A und B unabhängig

Totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = P(A \mid B) * P(B) + P(A \mid \overline{B}) * P(\overline{B})$

Gegenteile: $P(\overline{A}) = 1 - P(A); P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

Unabhängigkeit von Ereignissen:
A und B sind unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ oder wenn $P(A \mid B) = P(A)$ oder wenn $P(B \mid A) = P(B)$

A, B und C sind unabhängig, wenn $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$ und $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) * P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) * P(C)$

Bsp.: bei 100 Mengen zu prüfen:
$\binom{100}{1} + \binom{100}{3} + \ldots + \binom{100}{99} + \binom{100}{100} = 2^{100} - \binom{100}{1} - \binom{100}{0}$

Bsp.: 2 maliges Würfeln

A: 1. Wurf ist 3. $P(A) = \frac{1}{6}$

B: Summe der Augenzahlen ist 12. $P(B) = \frac{1}{36}$

C: 2. Wurf ist 7. $P(C) = 0$

$\underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{0} = \underbrace{P(A) * P(B) * P(C)}_{=0}$

$\underbrace{P(a \cap B)}_{=0} \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{6}} * \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{36}}$
$\rightarrow$ A, B und C sind abhängig

4 Zufallsvariablen

Definition 4. *Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion.*
$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *(jedem Ergebnis aus Ω wird eine reelle Zahl zugeordnet)*

Bsp.: 2 maliger Münzwurf
Wird 2 mal Wappen geworfen, so gewinnen wir 2 €
Wird 2 mal Zahl geworfen, so gewinnen wir 3 €
sonst verlieren wir 2,40 €.

$\Omega = \{\underbrace{WW}_{3}, \underbrace{ZZ}_{2}, \underbrace{WZ}_{-2{,}40}, \underbrace{ZW}_{-2{,}40}\}$ Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{4}$
Zufallsvariable X: Gewinn (in €)

Definition 5. *Die Verteilung (Wahrscheinlichkeitsverteilung) einer Zufallsvariable gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Zufallsvariable ihre möglichen Werte annimmt.*

Im **Bsp.:** Verteilung von X:
$P(X = 3) = \frac{1}{4}$
$P(X = 2) = \frac{1}{4}$
$P(X = -2,40) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Anderes **Bsp.:** 2 maliges Würfeln:
Wir gewinnen 2 €, wenn zuerst eine 6 gewürfelt wird.
Wir gewinnen 5 €, wenn keine 6 gewürfelt wird.
Wir verlieren sonst den Betrag B.

Zufallsvariable X: unser Gewinn
gesucht:Verteilung von X

Verteilung von X:
$P(X = 2) = \frac{1}{6}$
$P(X = 5) = \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$
$P(X = -B) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{25}{36}\right) = 1 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36}$

Für welches B ist das Spiel Fair? ($\mu = 0$)
$B = \frac{2*\frac{1}{6}+5*\frac{25}{36}}{\frac{5}{36}} = 27{,}40$ €

$\sigma^2 = 4 * \frac{1}{6} + 25 * \frac{25}{36} + 750.76 * \frac{5}{36} = 122.3$
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{122.3} = 11.06$

4.1 Diskrete Zufallsvariable

Diskret: X nimmt nur einzelne Werte mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten an.

Im **Bsp.:** 2 maliger Münzwurf:
Durchschnittsgewinn $\mu = 2 * \frac{1}{4} + 3 * \frac{1}{4} - 2,4 * \frac{1}{2} = 0,05 \Rightarrow$ Spiel lohnt sich für uns
(gewichtet mit Wahrscheinlichkeit – Durchschnittsgewinn pro Spiel)

Allgemein:

Definition 6. *Der Erwartungswert (Mittelwert) einer Zufallsvariable X, die Werte x_i mit den Werten p_i annimmt $(i = 1, 2, 3, \dots)$*
($\rightarrow$ endlich viele oder abzählbar viele Werte x_i)
ist $\mu = E(X) = \sum_i x_i * p_i$

Maß für die Streuung (Schwankung)

Definition 7. *Die Varianz einer Zufallsvariablen X (wie in der Definition von μ) ist $\sigma^2 = V(X) = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 * p_i$ quadratischen Abstände der Werte x_i von μ*
$\rightarrow$ mittlerer Quadratischer Abstand

Die Standardabweichung σ ist $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Weshalb quadratische Abstände?
z. B. kleiner Abstand $2 \rightarrow 2$ verdoppelt
großer Abstand $10 \rightarrow 100$ verzehnfacht

$\rightarrow$ große Abstände fließen verstärkt ein in die Varianz.
Kleine Abstände sind oftmals nur Toleranzen, Messfehler, Ungenauigkeiten.

Anwendung im Finanzbereich:
z. B. μ = mittlere Rendite
σ = Maß für Streuung = Maß für das Risiko

Wenn $\sigma = 0$ wäre, dann gibt es nur einen Wert $x = \mu$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Vereinfachung der Formel für σ^2:
$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 * p_i = \sum_i (x_i^2 - 2 * x_i * \mu + \mu^2) * p_i = \sum_i x_i^2 * p_i - \sum_i 2 * x_i * \mu * p_i + \sum_i \mu^2 * p_i$
$= \sum_i x_i^2 * p_i - 2\mu * \underbrace{\sum_i x_i * p_i}_{=\mu} + \mu^2 * \underbrace{\sum_i p_i}_{=1}$
$= \sum_i x_i^2 * p_i - 2\mu^2 + \mu^2$
$\sigma^2 = \sum_i x_i^2 * p_i - \mu^2$ einfache Formel für σ^2

Im **Bsp.:** von oben:

$\mu = 0,05$
$\sigma^2 = 4 * \frac{1}{4} + 9 * \frac{1}{4} + 5,76 * \frac{1}{2} - 0,05^2 = 6.1275$
$\sigma = \sqrt{6.1275} \approx 2.4754 \rightarrow$ Maß für die Streuung, also für die Mittlere Abweichung von μ.

Also pro Spiel: im $\varnothing$: Gewinn von μ =0,05 €.
aber wir haben eine Streuung um μ von 2,47 € noch in Relation zu $\mu \rightarrow$ Spiel mit hohem Risiko

Man muss σ in Relation zu μ sehen.
$\rightarrow$ Variationskoeffizient $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{2{,}47}{0{,}05} = 49,4 = 4940\%$

4.2 Verteilung und Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen

Im **Bsp.:** 2 maliges Würfeln von vorhin:
Verteilung von X: $P(X = 2) = \frac{1}{6}, P(X = 5) = \frac{25}{36}, P(X = -27.4) = \frac{5}{36}$

> **Definition 8.** *Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X.*
> $\rightarrow$ *Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $F(x) = P(X \leq x)$ bei der Verteilung $P(X = x)$*

$F(-27.4) = P(X \leq -27.4) = \frac{5}{36}$
$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = -27.4) + P(X = 2) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$

Bei einer diskreten Verteilung ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion, die von 0 nach 1 Wächst und an den Stellen x_i treten Sprünge auf, mit Sprunghöhe p_i

Allgemein (nicht nur für diskrete Verteilungen) hat eine Verteilungsfunktion $F(x)$ die Eigenschaften:

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ ist monoton wachsend nicht unbedingt streng wachsend
- $F(x)$ ist rechtsseitig stetig $\rightarrow$ aus der Definition: $F(x) = P(X \leq c)$

Bsp.: X: Anzahl an Wappen bei 2maligem Münzwurf. Skizziere die Verteilungsfunktion $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Bsp.: $F(x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ b * x + 0.75, & 0 \leq x < 1 \\ c, & x \geq 1 \end{cases}$

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ eine Verteilungsfunktion?

$a = 0, 0 \leq x \leq 2.25, c = 1$

Bsp.: (zu Verteilungsfunktion)

$$F(x) = \begin{cases} e^x * \frac{1}{2}, & x < 0 \\ b, & 0 \leq x < 2 \\ c, & x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Wie groß müssen b und c sein, damit $F(x)$ eine Verteilungsfunktion ist?

(b) Sei $b = 0.8, c = 1$.
Berechne:
$P(X = 0), P(X = -1), P(X \leq -1), P(X > -1), P(X \leq 2), P(X > 2), P(X \geq 3)$

(a) $e^0 * \frac{1}{2} = 0.5$
$\frac{1}{2} \leq b \leq c = 1$
Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $\lim_{x \to -\infty} \underbrace{F(x)}_{e^x * \frac{1}{2}} = 0, \lim_{x \to -\infty} \underbrace{F(x)}_{c} = 1 \Rightarrow c = 1$
- $F(x)$ rechtsseitig stetig
- $F(x)$ monoton wachsend

(b) $P(X = 0) = 0.3 (= 0.8 - 0.5)$
$P(X = -1) = 0$ (Kein Sprung)
$P(X \leq -1) = F(-1) = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.18394$
$P(X > -1) = 1 - F(-1) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.81606$
$P(X \leq 2) = F(2) = 1$
$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0$
$P(X < 2) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = F(2) - 0.2 = 0.8$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0$

Meist ist die Verteilungsfunktion

- eine Treppenfunktion $\rightarrow$ bei diskreten Verteilungen
- eine durchgehend stetige Funktion $\rightarrow$ keine Sprünge

Bsp.:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8} * x^2, & x \leq x < 2.5 \\ 1, & x \geq 2.5 \end{cases}$$

Berechne:
$P(X = -10) = 0$ (Kein Sprung)
$P(X = 2) = 0.3$ (Sprunghöhe bei $x = 2$)
$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{1}{8} * 2^2 = 0.5$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.2 = 0.8$
$P(X \geq 2.2) = 1 - P(X < 2.2) = 1 - P(X \leq 2.2) = 1 - \frac{121}{200} = \frac{79}{200} \approx 0.395$ (Kein Sprung!)

$P(x \leq X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = 0.2 - 0 = 0.2$
$P(2 < X < 2.2) = P(X < 2.2) - P(X \leq 2) = \frac{121}{200} - 0.5 = \frac{21}{200} \approx 0.105$

4.3 Stetige Verteilung

$\rightarrow$ stetige Funktion $F(x)$
$\rightarrow P(X = x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ ($\rightarrow$ keine Sprünge)

Bsp.: Zufallszahlen (reelle Zahlen) im Intervall $[100, 500]$, und zwar gleich verteilt.
$P(240 \leq X \leq 260) = \frac{260-240}{500-100} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0.05$

Stetige Verteilungsfunktionen besitzen eine Dichtefunktion $f(x)$ mit $f(x) = F'(x)$.
bis auf einzelne Stellen, an denen man nicht ableiten kann
bzw. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ $(= P(X \leq x))$

$\rightarrow$ Bedeutung: Die Dichtefunktion bei stetigen Verteilungen ist der Ersatz für die Einzelwahrscheinlichkeiten bei diskreten Verteilungen.

Im **Bsp.:** Fläche $\underbrace{\frac{1}{400}}_{\text{Höhe}} * \underbrace{400}_{\text{Breite}} = 1 =$ Gesamtwahrscheinlichkeit

Eigenschaften einer Dichtefunktion $f(x)$:

$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, d. h. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \leftarrow$ Gesamtwahrscheinlichkeit

Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1 \\ a * x^2, & 1 \leq x < x \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ eine Dichtefunktion?

(b) Berechne für das a aus (a) die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow$ auflösen nach a

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}xdx + \int\limits_{1}^{2} a * x^2dx$
$= \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{a}{3} * x^3\right]_1^2$
$= \frac{1}{4} - 0 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{4} + \frac{7}{3}a = 1$
$\frac{7}{3}a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{28}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} * x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{9}{28} * x^2, & 1 \leq x < x \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

(b) $F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx$

$$F(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 + c_2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{28}x^3 + c_3, & 1 \leq x < x \\ c_4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmung der Konstanten:

$c_1 = 0$, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$c_4 = 0$, da $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Stetigkeit an den Nahtstellen $0, 1, 2$

$x = 0 : c_1 = \frac{1}{4} * 0^2 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$x = 1 : \frac{1}{2} * 1^2 + c_2 = \frac{3}{28} * 1^2 + c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

Zur Kontrolle:

$x2 : \frac{3}{28} * 2^3 + \frac{1}{7} = 1 = c_4 \Rightarrow$ stimmt

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} c_1 * e^{-2x}, & x \geq 0 \\ c_2, & x < 0 \end{cases}$

Bestimme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist.
Berechne dann $F(x)$.

$x = 0 : c_2 = 0$

Damit die Fläche für $x < 0$ nicht ∞ groß ist, muss $c_2 = 0$ sein.

$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} c_2 dx + \int\limits_{0}^{\infty} c_1 * e^{-2x}dx = \int\limits_{0}^{\infty} c_1 * e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2} * c_1 * e^{-2x}\right]_0^{\infty}$

$= -\frac{1}{2} * c_1 * e^{-\infty} - (-\frac{1}{2} * c_1 * e^0) = \frac{1}{2} * c_1 \Rightarrow c_1 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2 * e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-2x} + d_1, & x \geq 0 \\ d_2, & x < 0 \end{cases}$$

Berechnung von d_1, d_2:

$d_2 = 0$, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ Stetigkeit an der Nahtstelle $x = 0$.

$-e^{-2*0} + d_1 = d_2 \Rightarrow -1 + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-2x} + 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Berechne $P(X \leq -1), P(X > 0.5), P(1 < X \leq 2), P(X = 0.5), P(Xy0.5)$

$P(X \leq -1) = F(-1) = 0$

$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - F(0.5) = e^{-1} \approx 0.36788$

$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(x \leq 1) = F(2) - F(1) = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.11702$

$P(X = 0.5) = 0$

$P(X < 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - e^{-1} \approx 0.63212)$

Allgemein: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei stetigen Verteilungen:

$P(X = a) = 0$

$P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a), P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

Oder mit Hilfe der Dichtefunktion $f(x)$:

$P(X \leq a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$P(a \leq a \leq b) = \int\limits_a^b f(x)dx$

4.4 Wichtige Beispiele für Verteilungen

4.4.1 Diskrete Verteilung

- Gleichverteilung
  Die Zufallsvariable X nimmt Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ an.
  $\rightarrow P(X = x_1) = P(X = x_2) = \ldots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$

- Binomialverteilung Ein Zufallsexperiment wird n-mal unabhängig voneinander wiederholt.
  Bsp.: 100 maliges würfeln ($n = 100$)
  A: Ereignis bei 1-maliger Durchführung des Experiments
  Im **Bsp.:** A: es wird 5 gewürfelt
  $\rightarrow$ Zufallsvariable X: Anzahl, wie oft A eintritt bei der n-maligen Wiederholung des Experiments.
  im **Bsp.:** X: Anzahl der 5en beim 100-maligen Würfeln
  $\rightarrow X$ ist binomialverteilt mit Parametern n und $p = P(A)$, d. h. $P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ für $k = 0..n$
  $P(X = 0) = P(\text{keine } 5) = \frac{5^{100}}{6^{100}}$
  $P(X = 1) = P(\text{eine } 5) = \frac{100 * 5^{99}}{6^{100}}$
  $P(X = 10) = P(10\ 5\text{en}) = \frac{\binom{100}{10} * 5^{90}}{6^{100}}$

Bsp.: Datenübertragung von 5000 Bits.
Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit Fehlerhaft übertragen wird, ist 1%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

(a) genau 20 Bits fehlerhaft übertragen?
$\binom{5000}{20} * 0.01^{20} * 0.99^{4980}$

(b) mehr als 2 Bits fehlerhaft übertragen?
$P(X > 2) \underset{\text{Gegenteil}}{=} 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0))$
$= 1 - \left(\binom{5000}{2} * 0.01^2 * 0.99^{4998} + \binom{5000}{1} * 0.01 * 0.99^{4999} + \binom{5000}{0} * 0.01^0 * 0.99^{5000}\right)$

4.4.2 Geometrische Verteilung

Bsp.: Wir schießen so lange, bis wir den anderen Treffen.
Wahrscheinlichkeit, bei einem Schuss zu treffen, ist 30%.
X Anzahl der Schüsse bis zum Treffer
$\rightarrow$ mögliche Werte von $X : 1, 2, 3, \ldots$

$P(X = k) = 0.7^{k-1} * 0.3$

Allgemein: Ein Zufallsexperiment wird beliebig oft (unabhängig voneinander) wiederholt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A bei einmaliger Durchführung auftritt, ist p. X : Anzahl der Wiederholungen, bis zum ersten mal A eintritt.
$\rightarrow X$ ist geometrisch verteilt mit Parameter p, d. h.
$P(X = k) = (1-p)^{k-1} * p$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

Bsp.: Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) tritt beim zweiten oder dritten Wurf beim Würfeln die erste 2 auf?
$P(X=2)+P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3 * \frac{1}{6}$

(b) tritt beim zehnten Wurf die zweite 2 auf?
$9 * \frac{1}{6} * (\frac{5}{6})^8 * \frac{1}{6}$

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei zehn Würfen zwei zweier auf?
$\binom{10}{2} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^8$

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt beim 100. Wurf die fünfte zwei auf?
$\binom{100}{4} * \left(\frac{1}{6}\right)^4 * \left(\frac{5}{6}\right)^{95}$

Bsp.: Russisches Roulette, 6er Trommel, mit einer Patrone. Wir spielen allein.
X : Anzahl der Versuche, bis wir tot sind.

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{1}{6} && = \frac{1}{6} \\
P(X=2) &= \frac{5}{6} * \frac{1}{5} && = \frac{1}{6} \\
P(X=3) &= \frac{5}{6} * \frac{4}{5} * \frac{1}{4} && = \frac{1}{6} \\
P(X=4) &= \frac{5}{6} * \frac{4}{5} * \frac{3}{4} * \frac{1}{3} && = \frac{1}{6} \\
P(X=5) &= \frac{5}{6} * \frac{4}{5} * \frac{3}{4} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} && = \frac{1}{6} \\
P(X=6) &= \frac{5}{6} * \frac{4}{5} * \frac{3}{4} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} && = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Keine geometrische Verteilung, da keine Unabhängigkeit der Versuche

Gleiches Beispiel, aber nach jedem Versuch wird die Trommel zufällig gedreht → geometrische Verteilung.

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{1}{6} \\
P(X=2) &= \frac{5}{6} * \frac{1}{6} \\
P(X=3) &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Berechnung von μ und σ^2:

Bei der geometrischen Verteilung:
$P(X=k)=(1-p)^{k-1} * p,\ k=1,2,3\ldots$

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} k * (1-p)^{k-1} * p \\
&= p * \sum_{k=1}^{\infty} l * (1-p)^{k-1} \\
&= p * \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{p} \\
\sigma^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 * (1-p)^{k-1} * p - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\
&= ?
\end{aligned}$$

geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k * x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Bei der Binomialverteilung:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} \\
\mu &= \sum_{k=0}^{n} k * \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} \\
&= \ldots = n * p \\
\sigma^2 &= \ldots = n * p * (1-p)
\end{aligned}$$

Skizze der Verteilungen:

geometrische Verteilung:

Binomialverteilt

für $p = 0.5$ ist die Verteilung Symmetrisch

stetige Verteilung

- stetige Gleichverteilung auf einem Intervall $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} c_1 = 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} * x + c_2, & a \leq x \leq b \\ c_3 = 1, & x \geq b \end{cases}$$

$F(x)$ muss an der Stelle a stetig sein:
$0 = \frac{1}{b-a} * a + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{a}{b-a}$

- Exponentialverteilung
  Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c * e^{-\lambda * x}, & 0 \leq x \end{cases}$
  Bestimmen von c, so dass die Dichtefunktion passt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{=0} + \int_{0}^{\infty} f(x)dx \\
&= \left[-\frac{c}{\lambda} * e^{-\lambda * x}\right]_0^\infty = 1 \\
\underbrace{(-\frac{c}{\lambda} * e^{-\lambda*\infty})}_{=0} -((-\frac{c}{\lambda} * e^{-\lambda * o})) &= 1 \\
\frac{c}{\lambda} &= 1 & | * \lambda \\
c &= \lambda \\
\Rightarrow f(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda * e^{-\lambda * x}, & 0 \leq x \end{cases} \\
F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -e^{-\lambda * x} + c_2, & 0 \leq x \end{cases} \\
\Rightarrow F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -e^{-\lambda * x} + 1, & 0 \leq x \end{cases}
\end{aligned}$$

Anwendung: auf Wartezeiten-/Warteschlangenproblem
→ kurze Wartezeit mit hoher Wahrscheinlichkeit
→ größeres λ: kürzere Wartezeiten mit höherer Wahrscheinlichkeit.

(Gaußsche Normalverteilung)

Anwendung: wenn es einen Sollwert gibt und durch Zufallseffekte (Toleranzen, Messungenauigkeit, natürliche Abweichungen, ...) Abweichungen nach oben und unten auftreten.

Definition 9. *Die Dichtefunktion der Normalverteilung mit Parametern μ und σ ($N(\mu, \sigma)$-Verteilung) ist*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}*\sigma} * \underbrace{e^{-\frac{1}{2}*0^2}}_{=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}*\sigma}$

Veränderung von $\mu \rightarrow$ Verschiebung in x Richtung
Veränderung von $\sigma \rightarrow$ Stauchung/Dehnung in der Breite/Höhe

speziell: Standardnormalverteilung: $N(0,1) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$
Problem: Verteilungsfunktion $F(x)$ lässt sich nicht angeben/berechnen → nur Tabellenwerte für die Standartnormalverteilung

4.4.3 Erwartungswert und Varianz stetiger Verteilung

diskret:

$$\mu = \sum_i x_i * p_i$$
$$\sigma^2 = \sum_i x_i^2 * p_i - \mu^2$$

stetig:

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx$$
$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)dx - \mu^2$$

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ a * x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

Bestimme a so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist und bestimme dann μ.

Bestimmung von a :

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_0^1 xdx + \int_1^2 a * x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[a * \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} * 1^2 - \frac{1}{2} * 0^2 + a * \frac{1}{3} * 8 - a * \frac{1}{3} * 1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{7}{3}a = 1 \\
\Rightarrow \frac{7}{3}a &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow a &= \frac{3}{14}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{14}x^2, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx \\
&= \int_0^1 x * xdx + \int_1^2 x * \frac{3}{14}x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3} * x^3\right]_0^1 + \left[\frac{3}{56}x^4\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} * 1 - \frac{1}{3} * 0 + \frac{3}{56} * 2^4 - \frac{3}{56} * 1 \\
&= \frac{1}{3} - 0 + \frac{48}{56} - \frac{3}{56} = \frac{191}{168}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)dx - \mu^2 \\
&= \int_0^1 x^2 * xdx + \int_1^2 x^2 * \frac{3}{14} * x^2 dx - \left(\frac{191}{168}\right)^2
\end{aligned}$$

Bsp.: Exponentialverteilung: $f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda * x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

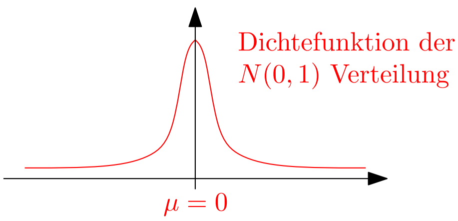
$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x * \lambda * e^{-\lambda * x} dx \\
&= \lambda * \int_{0}^{\infty} \underbrace{x}_{u} * \underbrace{e^{-\lambda * x}}_{v'} dx \\
&= \lambda * \left(\left[-\frac{x}{\lambda} * e^{-\lambda * x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} * e^{-\lambda * x}\, dx \right) \\
&= \lambda * \left(0 - \left[\frac{e^{-\lambda * x}}{\lambda^2} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= \lambda * \left(- \left(\frac{e^{-\infty}}{\lambda^2} - \frac{e^0}{\lambda^2} \right) \right) \\
&= \lambda * \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

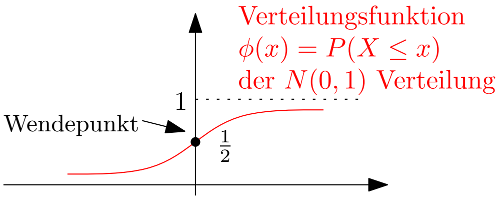
Bsp.: Gleichverteilung: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\, dx = \int_a^b x * \frac{1}{b-a}\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} * \frac{1}{b-a} \right]_a^b \\
&= \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{(b-a) * (b+a)}{2 * (b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

5 Normalverteilung

Definition 10. *X ist $N(\mu, \sigma)$ verteilt, wenn X die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ besitzt.*
Es gilt: $E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$
$\rightarrow X$ heißt standardnormalverteilt, wenn $\mu = 0, \sigma = 1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$
Zugehörige Verteilungsfunktion $F(x) = \phi(x) = \phi_{0,1}(x) \rightarrow$ hierfür: Tabellenwerte



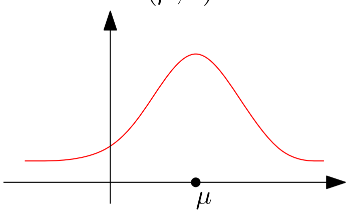


Aus der Tabelle:
Bsp.: $\phi(1.27) = 0.89796$
$\phi(0) = \phi(0.00) = 0.5$
$\phi(-1.27) = 1 - \phi(1.27) = 1 - 0.89796$

Berechnung von $\phi(-x)$:
$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Wenn X $N(0,1)$ verteilt ist, dann ist $P(X \leq b) = \phi(b), P(x \geq a) = 1 - \phi(a), P(a \leq x \leq b) = \phi(b) - \phi(a), P(X = a) = 0$

Wenn X $N(\mu, 0)$ verteilt ist, dann ist...



... $\frac{X-\mu}{\rho}$ $N(0,1)$ verteilt. Standardverteilung $\rightarrow$ Tabelle Anwendbar.

Bsp.: Bauteile aus der Produktion $\rightarrow$ Länge des Bauteils ist Normalverteilt. Mit $\mu = 10cm$ (Normalverteilt), $\sigma = 0.2cm$ (Streuung $\rightarrow$ Maß für die mittlere Abweichung von μ)
$\rightarrow 10cm \pm 0.2cm$

Ausschuss liegt vor, wenn die Länge unter $9.5cm$ liegt.
Gesucht: Auschussanteil

$$\begin{aligned}
\rightarrow P(X \leq 9.5) &= P(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.9-\mu}{\sigma}) \\
&= P(\underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{\text{ist } N(0,1) \text{ verteilt}} \leq \frac{9.5-10}{0.2}) \\
&= P(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq -2.5) = \phi(-2.5) \\
&= 1 - \phi(2.5) = 1 - 0.99379 \\
&= 0.00621
\end{aligned}$$

Wie viel % der Bauteile nimmt uns ein Kunde ab, wenn er eine Länge zwischen 9.7 und 10.25

benötigt?

$$
\begin{aligned}
P(9.7 \leq X < 10.25) &= P\left(\frac{9.7-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{10.25-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{-0.3}{0.2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{0.25}{0.2}\right) \\
&= \phi(\frac{0.25}{0.2}) - \phi(\frac{-0.3}{0.2}) \\
&= \phi(1.25) - \phi(-1.5) = \phi(1.25) - (1-\phi(1.5)) \\
&= 0.89435 - (1-0.93319) \\
&= 0.89435 - 0.06681 \\
&= 0.82754 = \underline{\underline{82.754\%}}
\end{aligned}
$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil länger als $10.7cm$ ist.

$$
\begin{aligned}
P(X > 10.7) &= 1 - P(X < 10.7) \\
&= 1 - P(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{10.7-\mu}{\sigma}) \\
&= 1 - P(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{0.7}{0.2}) \\
&= 1 - P(\frac{x-\mu}{\sigma} < 3.5) \\
&= 1 - \phi(3.5) = 1 - 0.99977 \\
&= 0.00023 = \underline{\underline{0.023\%}}
\end{aligned}
$$

6 Schätzungen und Tests

Test z. B. Liefert die Maschine im Mittel die geforderten $10cm$ Länge?
$\rightarrow$ mit einer Stichprobe.

6.1 Stichproben

Stichprobenumfang n, Stichprobenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
$\rightarrow$ arithmetisches Mittel (Durchschnitt)

$\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
$\rightarrow$ Schätzung für μ

Stichprobenvarianz

$$
\begin{aligned}
{s_n}^2 &= \frac{1}{n} * \left((x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{n} * \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - \overline{x}^2 \\
s^2 = {s_{n-1}}^2 &= \frac{1}{n-1} + \left((x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1} * (x_1^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{n}{n-1} * \overline{x}^2
\end{aligned}
$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \qquad \rightarrow \text{Schätzwert für } \mu$$

$$s^2 = s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - \frac{n}{n-1} * \overline{x}^2$$

$$s = s_{n-1} = \sqrt{s_{n-1}^2} \qquad \rightarrow \text{Schätzwert für } \sigma$$

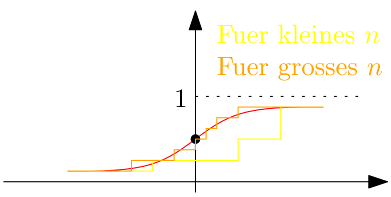
Bsp.: Stichprobe mit 100 Bauteilen aus der Produktion
$\rightarrow$ gemessene Lösungen: 50 mal 10cm, 20 mal 10.1cm, 10 mal 10.2cm, 20 mal 9.9cm.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{100} * (50 * 10 + 20 * 10.1 + 10 * 10.2 + 20 * 9.9) \\
&= 10.02 \\
s^2 &= \frac{1}{99} * (50 * 10^2 + 20 * 10.1^2 + 10 * 10.2^2 + 20 * 9.9^2) - \frac{100}{99} * 10.02^2 \\
&= \frac{19}{2475} \approx 0.007677 \\
s &= \sqrt{\frac{19}{2475}} = \frac{\sqrt{209}}{165} \approx 0.08762
\end{aligned}$$

Maß für die Streuung: $0.0876cm$
($\rightarrow$ $10.02 \pm 0.08762cm$)

6.2 Zentraler Grenzwertsatz

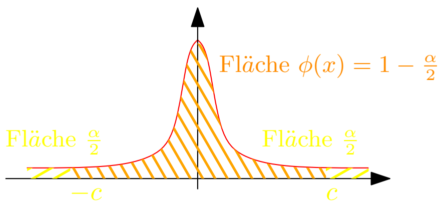
Wenn die Zufallsvariablen X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ unabhängig (X_1, X_2 sind unabhängig, wenn $P(X_1 = a \wedge X_2 = b) = P(X_1 = a) * P(X_2 = b)$) und identisch Verteilt (alle X_i besitzen die gleiche Verteilungsfunktion) sind mit Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und Varianz $\sigma^2 = Var(X_i)$, dann gilt für die Zufallsvariable $\overline{X} = \frac{1}{n} * (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$:
$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} * \sqrt{n}$ ist für große n näherungsweise $N(0, 1)$ verteilt.
(und: Konvergenz für $n \rightarrow \infty$)



6.3 Tests (Erwartungswerttests)

Nullhypothese $\rightarrow$ soll getestet werden beim Erwartungswerttest:
$H_0 : \mu = \mu_0$ z. B. Sollwert der Bauteillängen
$\rightarrow$ Zweiseitiger Test
oder $H_0 : \mu \leq \mu_0$ oder $H_0 : \mu \geq \mu_0$
$\rightarrow$ Einseitige Tests

Testgröße $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma} * \sqrt{n}$
i$\rightarrow$ ist für große n näherungsweise $N(0, 1)$ verteilt (siehe 6.2) wenn H_0 stimmt.



Man muss sich eine Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgeben (z. B. $\alpha = 1\%, 2\%$ oder 5%)

Testentscheidung: H_0 wird $\begin{cases} \text{angenommen,} & \text{wenn } -c \leq T \leq c \\ \text{abgelehnt,} & \text{wenn } T > c \text{ oder } T < -c \end{cases}$

Bestimmung von c:

$$\begin{aligned} \phi(c) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ c &= \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{aligned} \qquad \text{in der Tabelle: rückwärts}$$

Vorgehensweise beim Test

- aus den vorgegebenen α wird c bestimmt: $\phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\rightarrow$c aus der Tabelle
- in der Stichprobe wird $\overline{x}$ (und evtl. s) bestimmt
  $\rightarrow$ Testgröße $T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} * \sqrt{n}$ (σ kann durch s angenähert werden)
- Testentscheidung: H_0 wird $\begin{cases} \text{angenommen,} & \text{wenn } -c \leq T \leq c \\ \text{abgelehnt,} & \text{wenn } T > c \text{ oder } T < -c \end{cases}$

Bsp.: aus 6.2:
zusätzliche Angaben: Sollwert: $10cm$ (μ_0); Irrtumswahrscheinlichkeit: 2% (α)

$$\begin{aligned} c &= \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.02}{2}\right) \\ &= \phi^{-1}(1 - 0.01) \\ &= \phi^{-1}(0.99) \\ &= 2.33 \end{aligned}$$

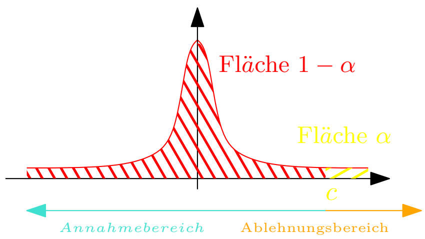
$$\begin{aligned} T &= \frac{10.02 - 10}{0.08762} * \sqrt{100} \\ &= \frac{0.02}{0.08762} * 10 = \frac{0.2}{0.08762} \\ &= 2.28258 \end{aligned}$$

Testentscheidung: $\underbrace{-c}_{-2.33} \leq \underbrace{T}_{2.283} \leq \underbrace{c}_{2.33}$

$\Rightarrow$ H_0 annehmen, d. h. es spricht nichts dagegen, dass die Maschine im Mittel den Sollwert produziert.

Nullhypothese: $\mu = \mu_0 = 10$

Bisher: zweiseitiger Test: $H_0 : \mu = \mu 0$
Jetzt: einseitige Tests:
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ (vorgegebener Maximalwert)



Testentscheidung:

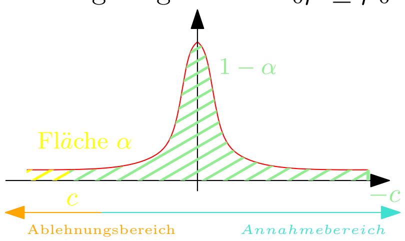
$$H_0 \text{ wird } \begin{cases} \text{angenommen,} & \text{wenn } T \leq c \\ \text{abgelehnt,} & \text{wenn } T > c \end{cases}$$

im **Bsp.:** wenn die Bauteile <u>maximal $10cm$</u> lang sein dürfen.
$\to H_0 : \mu \leq \underbrace{\mu_0}_{=10}$

$T = 2.283$ (wie beim zweiseitigen Test)
für $\alpha = 2\%$: $\phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow c = 2.06$

Testentscheidung:
$\underbrace{T}_{2.283} > \underbrace{c}_{2.06} \to H_0$ ablehnen $\to$ die Maschine liefert zu lange Teile (wahrscheinlich)

einseitig umgekehrt: $H_0 \mu \geq \mu_0$



$\hookrightarrow$ mit der Tabelle: $c = -\phi^{-1}(1-\alpha)$
Testentscheidung: $T \geq c \to H_0$ annehmen
$T < c \to H_0 ablehnen$ (Unterschied zum einseitigen Test $H_0 : \mu \leq \mu_0$)

Bsp.: Haltbarkeit von Birnen
gefordert: mindestens 10 Tage (durchschnittlich) $\to H_0 : \mu \geq 10$
Stichprobe: 1000 Birnen $\to$ Haltbarkeit: bei 800 Birnen 10 Tage, bei 100 Birnen 11 Tage, bei 100 Birnen 8 Tage
Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 2\%$
Spricht die Stichprobe gegen die Aussage, das die Haltbarkeit mindestens 10 Tage beträgt?

Bestimmung von T:
$n = 1000$
$\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$
$\sigma = s = \sqrt{s^2}$
(σ bisher unbekannt $\to$ aus der Stichprobe)
mit $s^2 = s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} * (x_1^2, x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{n}{n-1} * \overline{x}^2$

$\overline{x} = \frac{1}{1000} * (800 * 10 + 100 * 11 + 100 * 8) = 9.9$
$s^2 = \frac{1}{999} * (800 * 10^2 + 100 * 11^2 + 100 * 8^2) - \frac{1000}{999} * 9.9^2 = \frac{490}{999} = 0.\overline{490}$
$s = \sqrt{\frac{490}{999}} = \frac{7*\sqrt{1110}}{333} \approx 0.7$

$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} * \sqrt{n} = \frac{9.9-10}{0.7} * \sqrt{1000} = \frac{-10*\sqrt{10}}{7} \approx -4.5175$

Bestimmung von c:
$c = -\phi^{-1}(1-\alpha) = -\phi^{-1}(0.98) = -2.05$ (Rückwärts in Tabelle)

Testentscheidung:
$\underbrace{T}_{-4.5175} < \underbrace{c}_{-2.05} \to H_0$ ablehnen $\to$ Man davon ausgehen, dass die Haltbarkeit (im Schnitt) unter 10 Tagen liegt.

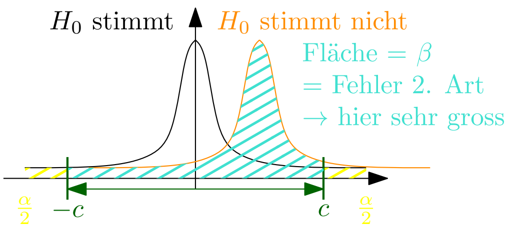
Im Überblick:

	Testgröße	Grenze c	H_0 annehmen, wenn	μ_0
$H_0 : \mu = \mu_0$	immer gleich	$c = \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$-c \leq T \leq c$	Sollwert
$H_0 : \mu = \mu_0$	$T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} * \sqrt{n}$	$c = \phi^{-1}(1-\alpha)$	$T \leq c$	Höchstens
$H_0 : \mu = \mu_0$	evtl. s aus der Stichprobe	$c = -\phi^{-1}(1-\alpha)$	$T \geq c$	Mindestens

6.4 Fehler 1. Art, Fehler 2. Art

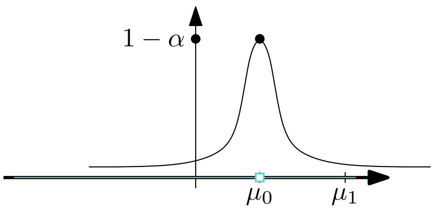
Vorgeben muss man α = Fehler 1. Art = $P(H_0$ ablehnen $\mid H_0$ stimmt$)$
es ergibt sich β = Fehler 2. Art = $P(H_0$ annehmen $\mid H_0$ stimmt nicht$)$

Problem: je kleiner man α wählt, umso größer ist β.



Gütefunktion eines Tests:

beim zweiseitigen Test: $H_0 : \mu = \mu_0$
wenn H_0 nicht stimmt, dann ist das wahre $\mu = \mu_1$



Berechnung von β im **Bsp.:** von vorhin:
$H_0 : \mu \geq 10; \alpha?2\% \to c = -2.05$, H_0 annehmen, wenn $T \geq c$
wenn das wahre μ z. B. gleich 0.8 ist → H_0 stimmt nicht

$\beta = P(H_0 \text{ annehmen} \mid \mu = 9.8) = P(T \geq -2.05 \mid \mu = 9.8)$

$= P(\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} * \sqrt{n} \geq -2.05 \mid \mu = 9.8)$

$$= P(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} * \sqrt{n} \geq -2.05 \mid \mu = 9.8)$$
$$= P(\frac{\overline{x} - \mu_1}{\sigma} * \sqrt{n} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma} * \sqrt{n} \geq -2.05 \mid \mu = 9.8)$$
$$= P(\frac{\overline{x} - \mu_1}{\sigma} * \sqrt{n} \geq -2.05 - \frac{\overbrace{\mu_1}^{9.8} - \overbrace{\mu_0}^{10}}{\sigma} * \sqrt{n} \mid u = 9.8)$$
$$= P(\frac{\overline{x} - \mu_1}{\sigma} * \sqrt{n} \geq 6.99 \mid \mu = 9.8) = 1 - P(\frac{\overline{x} - \mu_1}{\sigma} * \sqrt{n} \geq 6.99) = 1 - \overbrace{\phi(6.99)}^{\approx 1} \approx 0$$

ideal, das Praktisch kein Fehler 2. Art

Berechnung von β für $\mu = 9.99 \rightarrow$ nah an $\mu_0 = 10$

$$= -2.05 - \frac{9.99 - 10}{0.7} * \sqrt{1000} = -1.6$$
$$\rightarrow \beta = 1 - \underbrace{\phi(-1.6)}_{1-\phi(1.6)} = 1 - (1 - \phi(1.6)) = \phi(1.6) = 0.9452 = 94.52\%$$

$\rightarrow$ extrem hoch, blöd

Mit 94.52% Wahrscheinlichkeit wird die Hypothese angenommen, obwohl sie nicht stimmt.

6.5 Tests bei Binomialverteilung

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \\ 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \end{cases} \rightarrow \text{ist } B(\underbrace{n}_{=1}, p)\text{-verteilt}$$

$\mu = E(X_i) = 0 * (1 - p) + 1 * p = p$
$\sigma^2 = Var(X_i) = 0^2 * (1 - p) + 1^2 * p - p^2 = p - p^2 = p * (1 - p)$
$\sigma = \sqrt{p * (1 - p)}$
mit einem Test $H_0 : \mu = \mu_0 \rightarrow p = p_0$ können Wahrscheinlichkeiten getestet werden; z.Ḃ. für Fehlerraten $H_0 : p \leq p_0$ (P_0 = max. Fehlerrate).

Bsp.: Es soll getestet werden, ob ein Würfel gezinkt ist, anhand der Anzahl an Zweiern.
$H_0 : p = \frac{1}{6}$, Stichprobe: 3600 maliges Würfeln $\rightarrow$ liefert 580 Zweier.
Kann man mit Irrtumswahrscheinlichkeit von 3% sagen, dass der Würfel gezinkt ist?

Testgröße $T = \frac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0*(1-p_0)}} * \sqrt{n} = \frac{-2*\sqrt{5}}{5} \approx -0.8944$

Bestimmung von $c : \phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.03}{2} = 0.985 \Rightarrow 2.17$
für Zweiseitigen Test: $H_0 : \mu = \mu_0$
Testentscheidung:
Annehmen, wenn $-c \leq T \leq c \Rightarrow -2.17 \leq -0.8944 \leq 2.17$
$\Rightarrow$ Wird angenommen $\Rightarrow$ Nicht gezinkt.

Bsp.: Datenübertragung
Gefordert: maximale Fehlerrate von 1% aller übertragenen Bits. Nachricht mit 10000 Bits wird übertragen.
$\rightarrow$ es treten 105 Fehler auf.

Kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% davon ausgehen, dass die Fehlerrate max. 1% beträgt?

$p_0 = 0.01; \overline{x} = \frac{105}{10000} = 0.0105; n = 10000$

Testgröße $T = \frac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0*(1-p_0)}} * \sqrt{n} = \frac{0.0105-0.01}{\sqrt{0.01*(1-0.01)}} * \sqrt{10000} = \frac{5*\sqrt{11}}{33} \approx 0.5025$

Bestimmung von $c : \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow 2.05$

Testentscheidung: Annehmen, wenn $T \leq c \Rightarrow 0.5025 \leq 2.05$
$\Rightarrow$ Es ist davon auszugehen, dass die Fehlerrate max. 1% beträgt.

6.6 Konfidenzintervall

Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für den Erwartungswert μ

$\rightarrow$ Intervall, das um den Stichproben-Schätzwert $\overline{x}$ herumliegt, in dem μ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ liegt.
$\rightarrow 1 - \alpha$ Konfidenzintervall

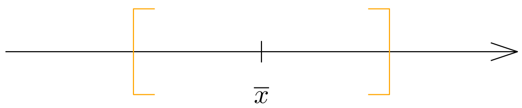
Analog zu den Tests (zweiseitig): $P(-c \leq T \leq c) = 1 - \alpha$

$$\rightarrow \underbrace{P\Big(-\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \leq \underbrace{T}_{\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}*\sqrt{n}} \leq \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\Big)}_{\text{Umformen, so dass } \mu \text{ in der Mitte steht}}$$

$$\rightarrow P\Big(\overline{x} - \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

$\rightarrow$ Formel für das $(1 - \alpha)$ Konfidenzintervall:

$\Big[\overline{x} - \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big]$ $\leftarrow$ da drin liegt μ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$



Konfidenzintervall mit $\overline{x}$ in der Mitte

Bsp.: Länge von Bauteilen aus der Produktion.
Stichprobe von 100 Bauteilen mit $\overline{x} = 8.8, s = 0.2$
gesucht: 95% Konfidenzintervall für μ

$$\Big[\overline{x} - \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big]$$
$$= \Big[8.8 - 1.96 * \tfrac{0.2}{\sqrt{100}}, 8.8 + 1.96 * \tfrac{0.2}{\sqrt{100}}\Big]$$
$$= \Big[\tfrac{10951}{1250}, \tfrac{11049}{1250}\Big] = \Big[8.7608, 8.8392\Big]$$

In diesem Intervall liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die ∅-Länge der Bauteile, die die Maschine Produziert.
Wird $1 - \alpha$ größer gewählt, so wird das Intervall größer.
Für größeres n wird das Intervall kleiner.

6.7 Näherungen durch die Normalverteilung

$\rightarrow$ Wie groß muss n sein, damit die Näherung erlaubt ist?
Bei der Binomialverteilung (zum Schätzen von Wahrscheinlichkeit) ist die Näherung erlaubt, wenn $n * p * (1 - P) \geq 9$ ist.

Im **Bsp.:** aus 6.5: maximale Fehlerrate 1%, $p = 0.01; n = 10000$

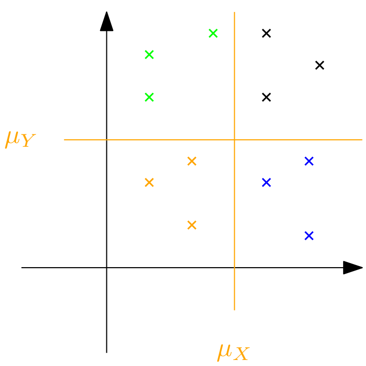
$n * p * (1 - p) = 10000 * 0.01 * (1 - 0.01) = 99 \geq 9 \rightarrow$ Näherung passt gut.
n sollte $\geq \frac{9}{p*(1-p)} = \frac{9}{0.01*0.99} = 910$ sein.

7 Kovarianz und Korrelation

Zur Messung von Zusammenhängen, hier: lineare Zusammenhänge, zwischen 2 Zufallsvariablen X, Y.

Definition 11. *Kovarianz von X und Y:* $Cov(X,Y) = E\big((X - \mu_X) * (Y - \mu_Y)\big) = E(X * Y) - \mu_X * \mu_Y$
$(\rightarrow Var(X) = E((X - \mu_X)^2 = Cov(X,X) = E(X^2) - \mu_X^2)$

Definition 12. *Korrelationskoeffizient:*
$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X * \sigma_Y}$
$\rightarrow -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$



$(X - \mu_X) * (Y - \mu_Y)$
$+ * + = +$
$- * - = +$
$- * + = -$
$+ * - = -$

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) \quad &= 0 \quad \rightarrow \text{kein Zusammenhang zwischen X und Y (unkorreliert)} \\ &> 0 \quad \rightarrow \text{wachsender Zusammenhang (positiv korreliert)} \\ &= 1 \quad \rightarrow \text{exakt auf einer Gerade mit positiver Steigung} \end{aligned}$$

Bsp.: Zweimaliger Münzwurf
X : Anzahl an Wappen im 1. Wurf
Y : Gesamtzahl an Wappen

$$P(X = 0, Y = 0) \overset{ZZ}{=} \frac{1}{4}$$
$$P(X = 0, Y = 1) \overset{ZW}{=} \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1, Y = 1) \overset{WZ}{=} \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1, Y = 2) \overset{WW}{=} \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(X + Y) - \mu_X * \mu_Y \\ &= 0 * 0 * \frac{1}{4} + 0 * 1 * \frac{1}{4} + 1 * 1 * \frac{1}{4} + 1 * 2 * \frac{1}{4} - 0.5 * 1 \\ &= \frac{1}{4} = 0.25 > 0 \end{aligned}$$

Standardnormalverteilung

$\phi_{0;1}(z)$

$z\backslash *$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1*	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2*	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3*	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4*	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5*	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6*	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7*	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8*	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9*	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0*	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998