Eigenschaften und Rechenregeln für Wahrscheinlichkeit

$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$ für $A : 0 \leq P(A) \leq 1$
$\overline{A} = A^C$ mit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (Gegenereignis)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Vereinigung)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Wenn A und B <u>disjunkt</u>)

Berechnung von Wahrscheinlichkeit mit Kombinatorik

1. Fall:
   Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge: $n^k \quad |\Omega| = n^k$
2. Fall:
   Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge: $\frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$
3. Fall:
   Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge: $\frac{n!}{(n-k)!*k!} = \binom{n}{k}$
4. Fall (Doof!)
   Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge: $\binom{n+k-1}{k} \overset{\text{da doof}}{\Rightarrow} n^k$ 1. Fall

Binomialkoeffizient/Multinomialkoeffizient

Bi: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$

Multi: $\frac{n!}{k_1!*k_2!*\ldots*k_l!}$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (wenn $P(A) \neq 0$ bedingte Wahrscheinlichkeit und Bedingung)

$P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A) = P(B) * P(A \mid B)$

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ (Wenn A, B unabhängig von einander)

Totale Wahrscheinlichkeit

Satz: $P(A) = P(A \mid B_1) * P(B_1) + P(A \mid B_2) * P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_k) * P(B_k)$

Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion $X : \omega \to \mathbb{R}$
Die Verteilung einer Zufallsvariable gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Zufallsvariable ihre möglichen Werte annimmt.

Diskrete Zufallsvariable

Diskret: X nimmt nur einzelne Werte mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten an

Erwartungswert (Mittelwert)

$M = E(X) = \sum_i x_i * p_i$ mit $(i = 1, 2, 3, \dots)$

Streuung (Varianz)

$\sigma^2 = V(X) = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 * p_i \rightarrow$ mittlerer Quadratischer Abstand

Standardabweichung σ ist $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Wenn $\sigma = 0 \Rightarrow x = \mu$ mit Wahrscheinlichkeit 1

$\sigma^2 = \sum_i x_i * p_i - \mu^2$ (einfachere Formel)

Variationskoeffizient $\frac{\sigma}{\mu}$ in (%)

Verteilung und Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen

Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $F(x) = P(X \leq x)$

Eigenschaften von $F(x)$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ ist monoton Wachsend (nicht unbedingt streng)
- $F(x)$ ist rechtsseitig stetig $(F(x)?P(X \leq c))$

Verteilungsfunktion

- eine Treppenfunktion $\rightarrow$ bei diskreten Verteilungen
- eine durchgehend stetige Funktion $\rightarrow$ Keine Sprünge

Stetige Verteilung

- stetige Funktion $F(x)$
- $P(X = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ Keine Sprünge)

Stetige Stetige Verteilungsfunktionen besitzen eine Dichtefunktion $f(x)$ mit

- $f(x) = F'(x)$

Eigenschaften Dichtefunktion

- $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, also $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Diskrete Verteilung

Gleichverteilung: $P(X = x_1) = P(X = x_2) = \ldots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$

Geometrische Verteilung

X ist geometrisch verteilt mit Parameter p: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p$

Binomialverteilung

Ein Zufallsexperiment wird n-mal unabhängig voneinander wiederholt
$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

- $\mu = \sum\limits_{k=0}^{n} k * \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k} = n * p$
- $\sigma^2 = n * p * (1 - p)$

für $p = 0,5$ ist die Verteilung Symmetrisch

Gaußsche Normalverteilung

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-\frac{1}{2} * (\frac{\pi - \mu}{\sigma})^2}$

Veränderung von $\mu \to$ Verschiebung ind x-Richtung

Veränderung von $\sigma \to$ Stauchung/Dehnung in der Breite/Höhe

Standardnormalverteilung: $N(0, 1) : F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Erwartungswert und Varianz stetiger Verteilung

<u>diskret:</u> $\mu = \sum\limits_{i} x_i * p_i \quad \sigma^2 = \sum\limits_{i} x_i^2 * p_i - \mu^2$

<u>stetig:</u> $\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\mathrm{d}x \quad \sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)\mathrm{d}x - \mu^2$

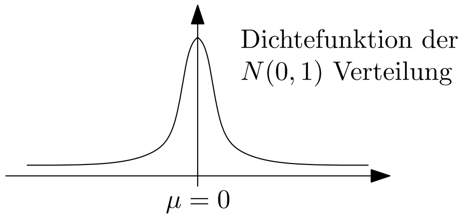
Normalverteilung

Wenn $f(x) \in X$, dann X ist $N(\mu, \sigma)$ verteilt.

Es gilt: $E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$

$\Rightarrow X$ heißt standardnormalverteilt, wenn $\mu = 0, \sigma = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Verteilungsfunktion $F(x) = \phi(x) = \phi_{0,1}(x) \rightarrow$ hierfür: Tabellenwerte



Schätzungen und Tests

Stichproben

- arithmetisches Mittel (Durchschnitt)
  $\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Schätzung für μ
  $\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$
- Schätzwert für σ
  $s^2 = \frac{1}{n-1} * (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{n}{n-1} * \overline{x}^2 \Rightarrow s = \sqrt{s_{n-1}^2}$

Zentraler Grenzwertsatz

$\overline{x} = \frac{1}{n} * (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

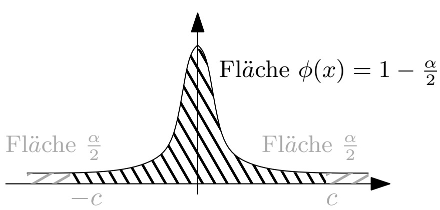
$\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma} * \sqrt{n}$ ist für große n näherungsweise $N(0,1)$ verteilt.

Tests

$H_0 : \mu = \mu_0 \Rightarrow$ zweiseitiger Test

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ oder $H_0 : \mu \geq \mu_0 \Rightarrow$ einseitige Tests

$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} * \sqrt{n}$



zweiseitiger Test

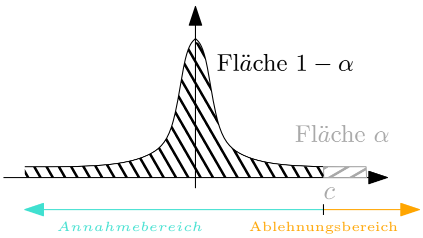
Testentscheidung: H_0 wird $\begin{cases} \text{angenommen} & , -c \le T \le c \\ \text{abgelehnt} & , T > c, T < -c \end{cases}$

Bestimmung von c

$\phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad c = \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ (rückwärts)

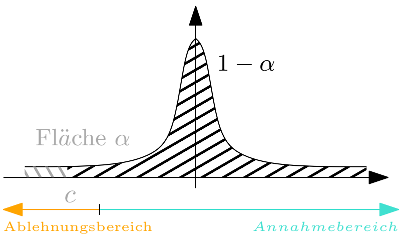
Einseitige Tests

$H_0 : \mu \le \mu_0$ (vorgegebener Maximalwert)



H_0 wird $\begin{cases} \text{angenommen} & , T \le c \\ \text{abgelehnt} & , T > c \end{cases}$

$H_0 : \mu \ge \mu_0$ (vorgegebener Minimalwert)



H_0 wird $\begin{cases} \text{angenommen} & , T \ge c \\ \text{abgelehnt} & , T < c \end{cases}$

Konfidenzintervall

Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für den Erwartungswert $\mu \to$ Intervall, das um den Stichproben-Schätzwert $\overline{x}$ herumliegt, in dem μ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ liegt.

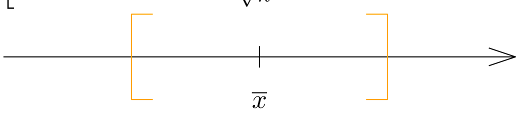
Analog zu den Tests (zweiseitig): $P(-c \le T \le c) = 1 - \alpha$

$$\to \underbrace{P\Big(- \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \le \underbrace{T}_{\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma} * \sqrt{n}} \le \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\Big)}_{\text{Umformen, so dass } \mu \text{ in der Mitte steht}}$$

$$\to P\Big(\overline{x} - \phi^{-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \le \ \mu \ \le \ \overline{x} + \phi^{-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

$\to$ Formel für das $(1 - \alpha)$ Konfidenzintervall:

$$\Big[\overline{x} - \phi^{-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{x} + \phi^{-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) * \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big] \leftarrow \text{da drin liegt } \mu \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \alpha$$



Konfidenzintervall mit $\overline{x}$ in der Mitte