Mathevorkurs für Informatik

Mitschrift von Thomas Battermann

21. - 30. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Modelieren
von Aufgabenstellungen/Problemen
Spezifizieren
Was soll/muss das Programm können
Verifizieren
Zeigen, das ein Programm/Algorithmus bestimmte Eigenschaften erfüllt.

Zum Lernen:

- Mathematik ist Übungssache
- In Vorlesungen wird wenig geübt
  $\Rightarrow$ Selbst üben
- Prüfungen gleich nach Vorlesungsende
  $\Rightarrow$ regelmäßig üben! Vorlesungsbegleitend
  Etwa 1h pro Vorlesungsstunde
- Arbeitsmöglichkeit schaffen
- In der Mathematik:
  Aussagen werden bewiesen

2 Natürliche Zahlen

$0, 1, 2, 3, 4, ...$
dienen zum Zählen

2.1 Axiome

1. 0 ist eine natürliche Zahl
2. Jede natürliche Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger: $s_{(n)}$ ist nachfolger
   $0, s_{(0)}, s_{(s_{(0)})}, s_{(s_{(s_{(0)})})}, ...$
3. 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad s_{(n)} \neq 0$$

4. Ist der Nachfolger von n gleich dem Nachfolger von m, dann gilt $n = m$

$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad s_{(n)} = s_{(m)} \Rightarrow m = n$

5. Induktionsprinzip:
   Ist M eine Menge von natürlichen Zahlen und gilt folgendes:
   - $0 \in M$
   - Falls $n \in M$ ist auch $s_{(n)} \in M$
     (für jedes n)

   Dann ist $M \in \mathbb{N}$

Satz: Es gibt keine größte natürliche Zahl
Def.:Eine Zahl ist am größten, wenn sie keinen Nachfolger hat
Beweis: Folgt direkt Axiom 2

3 Addieren, Multiplizieren, Potenzieren

Def.: $a + b = \text{`}a + 1 + 1 + ... + 1' = s_{(s_{(...s_{(0)}...)})}$
Genauer, rekursive Definition:

$a + 0 = a$ Basisfall
$a + s_{(n)} = s_{(a+n)}$ Rekursionsfall

Bsp.:

$$\begin{aligned} s_{(0)} + s_{(s_{(0)})} &= s_{(s_{(0)}+s_{(0)})} \\ &= s_{(s_{(s_{(0)}+0)})} \\ &= s_{(s_{(s_{(0)})})} \end{aligned}$$

3.1 Rekursive Definitionen

Bsp.:

$f_{(0)} = 0$
$f_{(n+1)} = f_{(n)} + f_{(n)}$ für $n \geq 0$

n	0	1	2	3	4	5	...
$f_{(n)}$	1	2	4	8	16	32	...

$f_{(1)} = f_{(0+1)} = f_{(0)} + f_{(0)} = 1 + 1 = 2$
$f_{(2)} = f_{(1+1)} = f_{(1)} + f_{(1)} = 2 + 2 = 4$
$f_{(3)} = f_{(2+1)} = f_{(2)} + f_{(2)} = 4 + 4 = 8$
$f_{(4)} = f_{(3+1)} = f_{(3)} + f_{(3)} = 8 + 8 = 16$
$f_{(5)} = f_{(4+1)} = f_{(4)} + f_{(4)} = 16 + 16 = 32$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Geschlossene Form}\\ f_{(n)} = 2^n\end{array}}$

3.2 Rechengesetze für + und -

Folgen aus Definition und Axiomen

$a + b = b + a$	Kommutativgesetz der Addition
$a + (b + c) = (a + b) + c$	Assoziativgesetz der Addition
$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	Distributivgesetz
$0 + a = a$ und $1 \cdot a = a$	Neutrale Elemente

3.3 Def.: Multiplikation

$a \cdot b = 0 + b + ... + b$

Rekursiv:
$0 \cdot b = 0$
$s_{(n)} \cdot b = (n + 1) \cdot b = b + n \cdot b$

3.4 Potenzieren

$a^b = a \cdot ... \cdot a$

Rekursive Definition

$a^1 = a$
$a^{n+1} = a \cdot a^n$

4 Rechengesetze

$a + b = b + a$

Die beiden Ausdrücke liefern den selben Wert, egal welche Zahlen für a ound b eingesetzt werden.

Anwendung der Rechengsetze zur Manipulation von Arithmetischen Ausdrücken

$$
\begin{aligned}
2 \cdot ((a+b)+c) &= 2 \cdot (a+(b+c)) \\
&= 2 \cdot (a+(c+b)) \\
&= 2 \cdot ((a+c)+b) \\
&= 2 \cdot ((c+a)+b) \\
&= 2 \cdot (c+a) + 2 \cdot b) \\
&= 2 \cdot c + 2 \cdot a + 2 \cdot b
\end{aligned}
$$

Abgeleitete Gesetze:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \\
&= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) \\
&= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\
&= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2
\end{aligned}
$$

5 Arithmetische Ausdrücke

Def.:
Basisfall:

- Jede Variable ist ein aithmetischer Ausdruck (Bsp.: $a, b, c, x, y, z, a_1, a_2, a_3, ...$)
- Jede Zahl ist ein Arithmetischer Ausdruck

Rekursionsfall:
Sind x und y arithmetische Ausdrücke, dann auch

- $(x+y)$
- $(x \cdot y)$
- (x^y)

Bsp.:
$((a+2) \cdot c)$

$x = \ a$ A.A. (Basisfall)
$y = \ 2$ A.A. (Basisfall)

$\Rightarrow \quad (x+y) = (a+2)$ ist A.A. (Rekursion)

$x = \ a+2$
$y = \ c$ A.A. (Basisfall)

$\Rightarrow \quad (x+y) = ((a+2) \cdot c)$ ist A.A. (Rekursion)

Mit der (Potenzieren-vor-) Punkt-vor-Strich-Regel kann man Klammern einsparen
Bsp.:
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3^2$

steht für: $(2 \cdot 5) + (2 \cdot (3^2)) = 28$
$\neq 2 \cdot (5 + (2 \cdot (3^2))) = 46$

$(2 \cdot (3+5)) \cdot 7 = 112$
$2 \cdot ((3+5) \cdot 7) = 112$
$2 \cdot (3+5) \cdot 7 = 112$

Das AG für $+$ und $\cdot$ erlaubt, dass Klammern bei gleichrangigen Operationen weggelassen werden können, ohne das Ergebnis zu verändern.

Variablen in Arithmetischen Ausdrücken sind Platzhalter von Zahlen.

6 Distributivgesetz „rückwärts“

6.1 Ausklammern

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

6.2 Vieta

$(a + a_1) \cdot (a + a_2) = a^2 + (a_1 + a_2) \cdot a + a_1 \cdot a_2$

7 Rechengesetze fürs Potenzieren

(I) $a^0 = 1$ (evtl. $a = 0$ ausschließen)

(II) $a^{n+1} = a \cdot a^n$ (Spezialfall von (III), $m = 1$)

(III) $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$ gleiche Basis

(IV) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ gleicher Exponent

(V) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

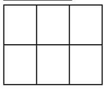
8 Primzahlen

Eine Zahl c mit

$c = a \cdot b$ (für $a, b \in \mathbb{N}$)

heißt vielfaches von a und b heißt Teiler von c ($c = a \cdot b$ bedeutet c kann als Rechteck mit Seitenlängen a und b gelegt werden)

Bsp.: $6 = 2 \cdot 3$



Eine Primzahl ist eine Zahl $p >= 2$, falls für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = p$ gilt $a = 1$ oder $b = 1$
(Primzahlen können nur als 'triviale' Rechtecke gelegt werden, d. h. eine Zeile oder eine Spalte)

Primzahlen sind 'Atome' bei der Zerlegung in Faktoren.
Jede Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.
$\Rightarrow$ Primfaktorzerlegung
Bsp.: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

9 Summenschreibweise

Sind $a_1, ..., a_n$ arithmetische Ausdrücke, dann schreibt man für $a_1 + ... + a_n$ auch kurz:

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ (Summe von $i = 1$ bis n a_i)

Bsp.:
$\sum\limits_{i=1}^{5} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$
$\sum\limits_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

9.1 Rekursive Definition

$\sum\limits_{i=1}^{0} a_i = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i = (\sum\limits_{i=1}^{n} ai) + a_{n+1}$

10 Ganze Zahlen

$$x + 1000 = 0$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Bzw.

$$x + n = 0$$

hat keine Lösung für $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$

$\rightsquigarrow$ Neue Zahlen $\quad -n$ für $n \in \mathbb{N}$
mit

$$-n + n = 0$$

$\Rightarrow$ $-0 = 0$

$\rightsquigarrow$ Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Alle Rechengesetze gelten weiterhin!

10.0.1 Neues Rechengesetz:

$\boxed{(-a) + a = 0}$ Inverses für Addition

Was ist $-(-a))$?

$$\begin{array}{rcll} -(-a)) & = & -(-a) + 0 & \text{(Neutrales Element +)} \\ & = & -(-a) + ((-a) + a) & \text{(Inverses +)} \\ & = & (-(-a) + (-a)) + a & \text{(AG+)} \\ & = & 0 + a & \text{(Inverses +)} \\ & = & a & \end{array}$$

$-(-a) = a$ (Abgeleitetes Rechengesetz)

Was ist $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$?

$$\begin{array}{rcll} a \cdot (-1) & = & a \cdot (-1) + (a + (-a)) & \text{(NE+, I+)} \\ & = & (a \cdot (-1) + a) + (-a) & \text{(AG+, NE}\cdot\text{)} \\ & = & a \cdot (-1 + 1) + (-a) & \text{(DG)} \\ & = & a \cdot 0 + (-a) & \text{(I+)} \\ & = & 0 + (-a) & \\ & = & -a & \end{array}$$

$\boxed{a \cdot (-1) = -a}$

Regel: $+ \cdot +$ ist $+$

$+ \cdot -$ ist $-$

$- \cdot -$ ist $+$

$$\begin{array}{rcl} (-1) \cdot (-1) & = & -(-1) \\ & = & 1 \end{array}$$

10.1 Neue Operation: Subtraktion

$$a - b = a + (-b)$$

AG gilt nicht bei $-$

$$\begin{aligned}(1-2)-3 &= -4\\ 1-(2-3) &= 1-(-1)=2\\ 1-2-3 &= (1-2)-3\end{aligned}$$

Bei Ausdrücken ist ohne Klammern:
Defaultist Linksseitige Klammerung (Rechnen von Links nach Rechts)

Bemerkung:

$x = a - b$

ist Lösung der Gleichung

$x + b = a$

Was ist -(a-b) ?

$$\begin{aligned}-(a-b) &= (-1)\cdot(a-b)\\ &= (-1)\cdot a + (-1)\cdot(-b)\\ &= -a + (-(-b))\\ &= -a + b)\end{aligned}$$

Bei Negierung einer Klammer wird $+$ und $-$ vertauscht.

Entsprechendes bei Subtraktion einer Klammer:

$$\begin{aligned}a-(b-c) &= a+(-(b-c))\\ &= a+(-b+c)\\ &= a-b+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& a-(b-(c-(d-e)))\\ = \;& a-b+(c-(d-e))\\ = \;& a-b+c-d+e\end{aligned}$$

11 Rationale Zahlen

Gleichung:

$x \cdot a = 1$

hat keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ für $a \neq 1$

Idee, führe $\frac{1}{a}$ ein für $a \neq 0$
mit $\frac{1}{a} \cdot a = 1$

11.0.1 Neues Rechengesetz:

$\frac{1}{a} \cdot a = 1$ Multiplikatives Inverses (I$\cdot$)

für $a \neq 0$

Schreibweise:

$b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$
Oben: Zähler; Unten: Nenner

Alle anderen Rechengesetze sollen weiter gelten.

$\frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

Rechengesetze (abgeleitet) fürs Bruchrechnen

11.1 Multiplikation von Brüchen

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= a \cdot \frac{1}{b} \cdot c\frac{1}{d} && \text{Def. Bruch} \\ &= a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} \cdot 1 && \text{KG}\cdot\text{, NE}\cdot \\ &= a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} \cdot (b \cdot d \cdot \frac{1}{b \cdot d}) && \text{I}\cdot \\ &= a \cdot c \cdot (\frac{1}{b} \cdot b) \cdot (\frac{1}{d} \cdot d) \cdot \frac{1}{b \cdot d} && \text{KG} \\ &= a \cdot c \cdot \frac{1}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} && \text{Def. Bruch} \end{aligned}$$

11.2 Erweitern/Kürzen

$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$ für $c \neq 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ Bruchdarstellung nicht eindeutig!

Eindeutige Darstellung: gekürzte Brüche
Ein Bruch heißt <u>gekürzt</u>, wenn Zähler und Nenner als gemeinsamen Teiler nur die 1 haben.

Teiler von 2: <u>1</u>, 2
Teiler von 3: <u>1</u>, 3

Teiler von 10: <u>1</u>, 2, <u>5</u>, 10
Teiler von 15: <u>1</u>, 3, <u>5</u>, 15

<u>ggT:</u> größer gemeinsamer Teiler

$ggT(10, 15) = 5$
$ggT(2, 3) = 1$

D. h. Bruch $\frac{a}{b}$ gekürtzt, falls $ggT(a, b) = 1$

$\frac{a}{b} = \frac{a : ggT(a,b)}{b : ggT(a,b)}$ $\Leftarrow$ gekürzter Bruch

11.3 Addition von Brüchen

11.3.1 Addition von gleichnamigen Brüchen

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a+b}{c}$

11.3.2 Addition von ungleichnamigen Brüchen

$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{d \cdot c}$

Bsp.:

$$\begin{aligned} \frac{2}{10} + \frac{7}{12} &= \frac{3 \cdot 12 + 7 \cdot 10}{120} \\ &= \frac{36+70}{120} = \frac{106}{120} = \frac{53}{60} \end{aligned}$$

$kgV(n,m)$ kleinstes gemeinsames Vielfaches von n und m

$kgV(n,m) = \frac{n \cdot m}{ggT(n,m)}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot \frac{kgV(c,d)}{c}}{kgV(c,d)} + \frac{b \cdot \frac{kgV(c,d)}{d}}{kgV(c,d)}$

11.4 Potenzrechnung mit Brüchen

11.4.1 Exponent von $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n-mal} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n-mal}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Bsp.: $\frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$

11.4.2 Exponent von $n \in \mathbb{N}$

a^{-1}

$a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1 \quad$ für $a \neq 0$

$\frac{1}{a}$ ist das x mit $x \cdot a = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

$a^{-n} = a^{(-1) \cdot n} = (a^{(-1)})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

$(-a)^n = ((-1)\cdot a)^n = (-1)^n \cdot a^n$

$$(-1)^n = \overbrace{(-1)\cdot(-1)}^{1} \cdot ... \cdot \overbrace{(-1)\cdot(-1)}^{1} = \begin{cases} -1, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 1, & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

12 Stellenwertsystem

Zahlendarstellung auch hintereinandergeschriebene Ziffern.
Wert der Ziffern von Position abhängig

Bsp.:	7	0	3	7	1
	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Wert (dargestellte Zahl):

$7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Basis b

b Ziffern $Z_0, ...Z_{b-1}$

mit Wert $w_{(Z_0)} = 0, ...w_{(Z_{b-1})} = b-1$

Bsp.: $b = 10$
Ziffern $'0','1',...,'9'$
Wert $0, 1, ..., 9$

2er-System:
$b = 2$
Ziffern $'0','1'$
Wert $0, 1$

16er-System:
$b = 16$
Ziffern $'0',...,'9','a',...,'f'$
Wert $0, ..., 9, 10, ..., 15$

Im System mit Basis b steht die Ziffenfolge

$Z_{a_k} Z_{a_{k-1}} ... Z_{a_0}$

für die Zahl

$a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + ... + a_0 \cdot b^0 = \sum_{i=0} k a_i \cdot b^i$

Bsp.:

$$\begin{aligned}(1AF)_{16} &= 16^2 + 160 + 16 \\ &= 156 + 160 + 15 \\ &= 431\end{aligned}$$

12.1 Nachkommastellen

$Z_k, ..., Z_1, Z_0 \ , \ Z_{-1}, ...$

hat wer

$a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + ...$

Bsp.:
$1,5 = 1 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} = 1 + \frac{5}{10} = \frac{3}{2}$

$(1,1)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

12.2 Zählen

$199 + 1 = 200$

$10111)_2 = (11000)_2$

12.3 Addition, Multiplikation

12.3.1 Schriftlich Addieren

10er-System:

$$\begin{array}{ccccc}
5 & 4 & 3 & 1 & 1 \\
 & 2 & 1 & 8 & 9 \\
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
5 & 6 & 5 & 0 & 0
\end{array}$$

10er-System:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

12.3.2 Schriftliche Multiplikation

10er-System:

$$\begin{array}{ccccccccc}
5 & 4 & 4 & 1 & \cdot & 1 & 2 & 0 & 3 \\
\hline
 & & 5 & 4 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & 8 & 8 & 2 & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\
 & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
\hline
 & & 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & 2 & 3
\end{array}$$

2er-System:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

12.4 Dividieren

$a : b$
$a \rightarrow$ Divident
$b \rightarrow$ Divisor

Im Prinzip durch Sukzessives Subtrahieren. Divisor wird dabei möglichst hoch gewichtet.

Bsp:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
4 & 5 & 0 & : & 1 & 5 & = & 3 & 0 \\
4 & 5 & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & : & 7 & = & 0 & , & \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{8} & \overline{5}\;\overline{7} \\
0 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-1}
1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & 7 & & & & & & & & & \\
\cline{1-2}
 & 3 & 0 & & & & & & & & \\
 & 2 & 8 & & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 2 & 0 & & & & & & & \\
 & & 1 & 4 & & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 6 & 0 & & & & & & \\
 & & & 5 & 6 & & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 4 & 0 & & & & & \\
 & & & & 3 & 5 & & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 5 & 0 & & & & \\
 & & & & & 4 & 9 & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & 1 & 0 & & &
\end{array}
$$

13 Polynom

Arithmetischer Ausdruck

$a_k \cdot x^k + ... + a_1 \cdot x1 + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$später $\mathbb{R}$)

heißt Polynom x von Grad k $a_k \neq 0$

$= \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i$

Analogie zur Zahlendarstellung:
- Variable x = Basis b
- Ziffern sind beliebige Zahlen

13.1 Polynommultiplikation

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(& x^3 & + & 0x^2 & + & 5x & - & 1 &)\cdot(& x^2 & - & 2x & - & 1 \;) \\
\hline
 & & & x^5 & + & 0 & + & 5x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & & & & - & 2x^4 & + & 0 & - & 10x^2 & + & 2x & & \\
 & & & & & & - & x^3 & + & 0 & - & 5x & + & 1 \\
\hline
 & = & & x^5 & - & 2x^4 & + & 4x^3 & - & 11x^2 & - & 3x & + & 1
\end{array}
$$

13.2 Polynomdivision

Division $p_{(x)} : q_{(x)}$

Solange $Grad(p_{(x)}) => Grad(q_{(x)})$

> Bestimme $a \cdot x^l$ so, dass
> $r_{(x)} = p_{(x)} - a_{\c{}}cdotx^l \cdot q_{(x)}$
> kleineren Grad hat als $p_{(x)}$
> Output „$a \cdot x^l +$"
> $p_{(x)} = r_{(x)}$

Wenn $p_{(x)} \neq 0$ dann:
Output $\frac{p_{(x)}}{q_{(x)}}$

<u>Bsp.:</u>

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
(& x^3 & + & 0 \cdot x^2 & + & 5 \cdot x & - & 1 &) : (x^2 - 2 \cdot x - 1) = x + 2 + \frac{10 \cdot x + 1}{x^2 - 2 \cdot x - 1} \\
-(& x^3 & - & 2 \cdot x^2 & - & x & & &) \\
\hline
(& 0 & + & 2 \cdot x^2 & + & 6 \cdot x & - & 1 &) \\
-(& & & 2 \cdot x^2 & - & 4 \cdot x & - & 2 &) \\
\hline
& & & & + & 10 \cdot x & + & 1 &
\end{array}
$$

14 Reele Zahlen $\mathbb{R}$

rationale Zahlen:
Darstellung als endliche oder periodische Dezimalbrüche

<u>Bsp.:</u>
$\frac{1}{7}$

$3,0 \quad 3,1\overline{0} \approx 3,0\overline{9}$

Nicht periodische Dezimalbrüche
Bsp.:
$1,10100100010000...$
ist nicht rational
$\rightarrow$ irrationale Zahlen

reele Zahlen: rationale und irrationale Zahlen

15 Brüche im Exponent

Was ist $a^{\frac{1}{b}}$?

Potenzregel: $(a^m)^n = a^{n \cdot m}$

$n = b; \quad m = \frac{1}{b} \quad$ für $b \neq 0$

$(a^{\frac{1}{b}})^b = a^{b \cdot \frac{1}{b}} = a$

Idee: $a^{\frac{1}{b}}$ ist Lösung von

$x^b = a$

Bsp.: $x^3 = 27 \quad b = 3; a = 27; Lsg.: x = 3$

Probleme:

1. Manchmal gibt es mehrere Lösungen:

   $x^2 = 4 \quad$; Lsg.: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

   $4^{\frac{1}{2}} = ?$

   $\rightarrow$ Positive Lösung, d. h. $4^{\frac{1}{2}} = 2$

2. Manchmal gibt es keine Rationale Lösung

   Bsp.: $b = 2 \quad a = 3$

   $x^2 = 3$

   hat keine Rationale Lösung
   Annäherung durch Rationale Zahlen:

   $1 < x < 2$

   $1,7 < x < 1,8$

   $\rightarrow$ Irrationale Zahl

   $\rightarrow$ reele Zahlen

3. $b < 0 \rightarrow$ keine Reele Lsg.

   $x^2 = -1$

   $\rightarrow$ neue Zahlen: $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)
   Bsp.: $2 + \sqrt{-4} = 2 + 2i$

Def.: Für $a \geq 0$ ist $a^{\frac{1}{b}}$ die positive Lösung der Gleichung

$x^b = a$

Schreibweise:

$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$

b = Wurzelexponent; a = Radikant

Für $a < 0$ und b ungerade ist $\sqrt[b]{a}$ Definiert als Lösung der Gleichung

$a^b = a$

Bsp.:

$\sqrt[3]{27} = 3 = 27^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{-27} = -3$
$(-27)^{\frac{1}{3}}$ ist undefiniert

Sonst:

$(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = (-27)^{2\cdot\frac{1}{6}} = (27^2)^{\frac{1}{6}}$
$= 3$!widerspruch!

Was ist $\sqrt{x^2}$?
$\sqrt{x^2} = |x|$

15.1 Potenzgesetze

$a, b \in \mathbb{R}^+$
$m, n \in \mathbb{Z}(\mathbb{R}) \quad n \neq 0$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$a^0 = 1 \qquad$ (gilt auch für $\alpha \in \mathbb{R}^-$)

$\frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$ und $\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$
(Produkt mit gleichem Exponent)

$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$ und $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$
(Produkt mit gleicher Basis)

$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$

Bemerkung: für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ist auch $a, b \in \mathbb{R}$ möglich.

16 Logarithmen

Def.: Sei $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$
Der Logarithmus von a zur Basis b
$\log_b a$
ist diejenige Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit
$b^x = a$

Bem.: Dieses x ist eindeutig

Bew.: $b^{x_1} = b^{x_2} = a$

$\Rightarrow a \cdot b^{x_1 - x_2} = b^{x_1} \cdot b^{x_2 - x_1}$
$= b^{x_2}$
$a \cdot b^{x_2 - x_1} = a \quad | \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow b^{x_2 - x_1} = 1$

$\Rightarrow\ b = 1$ (ausgeschlossen)
oder $x_2 - x_1 = 0$ d. h. $x_2 = x_1$

Es gilt also: $\boxed{b^{\log_b a} = a}$

<u>Bspe.:</u>
$\log_7 49 = 2$
$\log_2 64 = 6$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} = 4$
$\log_3 81 = 4$
$2^{\log_2 10} = 10$

16.1 Logarithmen-Gesetze

$x, y \in \mathbb{R}^+$
$b \in \mathbb{R}^+ \quad b \neq 1$

(I) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(II) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(III) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x \quad (a \in \mathbb{R})$

(IV) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad a \in \mathbb{R}^+; a \neq 1$

(V) $\log_b 1 = 0 \quad und \quad \log_b b = 1$

16.1.1 Beweis

(I) Es gilt:
$b^{\underline{log_b(x \cdot y)}} = x \cdot x = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y}$
$= b^{\underline{\log_b x + \log_b y}}$
$\Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

(III) $b^{\underline{\log_b x^a}} = x^a = (b^{log_b x})^a = b^{\underline{a \cdot log_b x}}$

(II) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x \cdot y^{-1} = \log_b x + \log_b y^{-1}$
$= \log_b x + (-1) \cdot \log_b y = \log_b x - \log_b y$

(IV) $\log_a a \cdot x = \log_a b^{\log_b x}$
$= \log_b x \cdot \log_a b$
$\Rightarrow = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

<u>Bspe.:</u>
$log_{10} 3^6 = 5 \cdot log_{10} 3$
$log_{10} \frac{2 \cdot b^2}{x^5} = log_{10} 2 \cdot b^2 - \log_{10} x^5$
$= \log_{10} 2 + 2 \cdot \log_{10} b - 5 \cdot \log_{10} x$

17 Runden

Untere/Obere Ganzklammern

$\lfloor x \rfloor$ = größte ganze Zahl $z \leq x$

$\lceil x \rceil$ = kleine ganze Zahl $z \geq x$

$\lceil 4,5 \rceil = 5$
$\lfloor 4,5 \rfloor = 4$
$\lceil -3,1 \rceil = -3$
$\lfloor -3,1 \rfloor = -4$
$\lfloor 4 \rfloor = 4$
$\lceil 5 \rceil = 5$

18 Naive Mengenlehre

Def.: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.
Eine Menge ist ein neues Objekt, die Menge ihrer Objekte.
Ein Objekt ist entweder in der Menge
$x \in M$ (x Element von M)
oder nicht in der Menge
$x \notin M$
(nichts sonst)

Darstellung:

1. Aufzählung der Elemente in Mengenklammern
   Bspe.:
   $\{1, 2, 3\}$

   Die Menge der Teiler von 6:
   $T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

   $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

   $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

   $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

   $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 6\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$
   (Menge der oben genannten Mengen)

   $\emptyset = \{\}$

2. Durch eine Eigenschaft der Elemente (Grundmenge a)

   $\{x | x$ hat Eigenschaft E $\}$

   $\{x \in G | x$ hat Eigenschaft E $\}$
   $= \{x | x \in G$ und x hat Eigenschaft E$\}$

Bsp.:

$T_6 = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist Teiler von } 6\}$
$= \{x \in \mathbb{N} | x \text{ teilt } 6\}$

$\{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist vielfaches von } 2\}$
Menge aller geraden Zahlen

$\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$

Darstellung mti Eigenschaft und Transformation

$\{f_{(x)} | x \text{ hat Eigenschaft E}\}$
$=\{y |$ es gibt ein x mit Eigenschaft E und $y = f_{(x)}\}$

Bsp.:

$\{2 \cdot x | s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$
$=$ Menge der Vielfachen von 2

$\{2 \cdot x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\{x^2 | x \in \mathbb{Z}\} =$ Menge aller Quadratzahlen

$\{x^2 | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

Zwei Mengen sind gleich, wenn die dieselben Elemente enthalten

$A = B$

Bsp.:

$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
$\{2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3\}$
$\{x \in \mathbb{Z} | x \text{ ist gerade }\} = \{2 \cdot x | x \in \mathbb{Z}\}$

18.1 Teilmengenbeziehungen

$A \subseteq B$ A ist Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist.

Bspe.: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
$\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
$\{1, 2\} \nsubseteq \{1\}$

Satz: Es gilt folgendes für alle Mengen A, B

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann $B = A$

3. wird oft benutzt, um zu zeigen, das 2 Mengen gleich sind.

18.2 Notation

$\subseteq$ (Manchmal in der Literatur $\subset$)

$\subsetneq$ $A \subsetneq B$ (A echte Teilmenge von B, falls $A \subseteq B$ aber $A \neq B$
($\subsetneq$ in anderer Literatur manchmal $\subset$

$\not\subseteq$ $A \not\subseteq B$ (A nicht Teilmenge von B)

18.3 Operationen auf Mengen

Schnitt:	$A \cap B$	(A Geschnitten B) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
Vereinigung:	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Differenz:	$A - B$	$= A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Komplement mit einer Grundmenge G (d. h. $A \in G$)
$\overline{A} = G - A$

Bspe.:

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

$\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

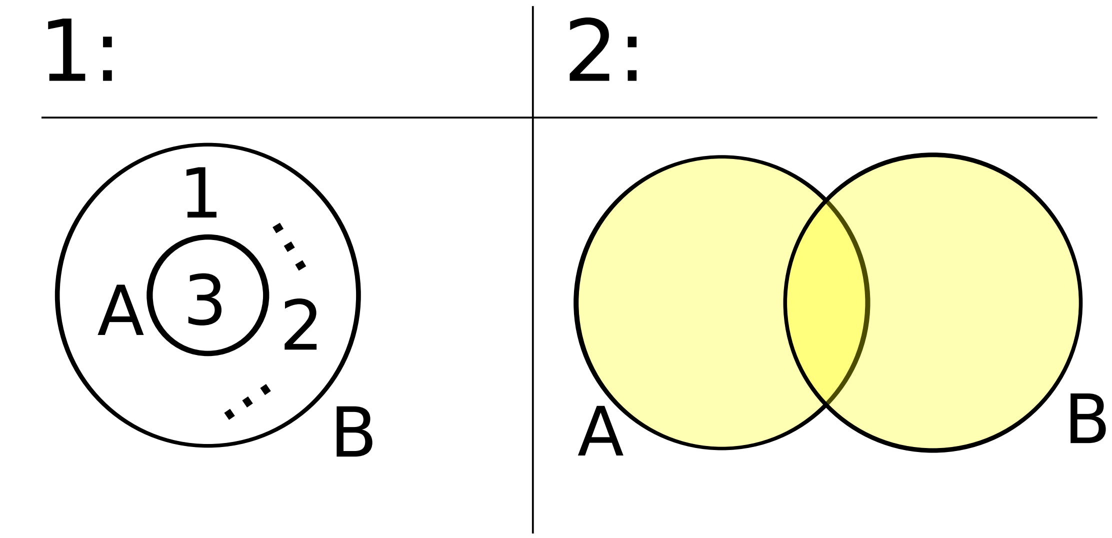
$H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist nicht vielfaches von } 12\}$

$\overline{H} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist vielfaches von } 12\}$
$= \{12 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

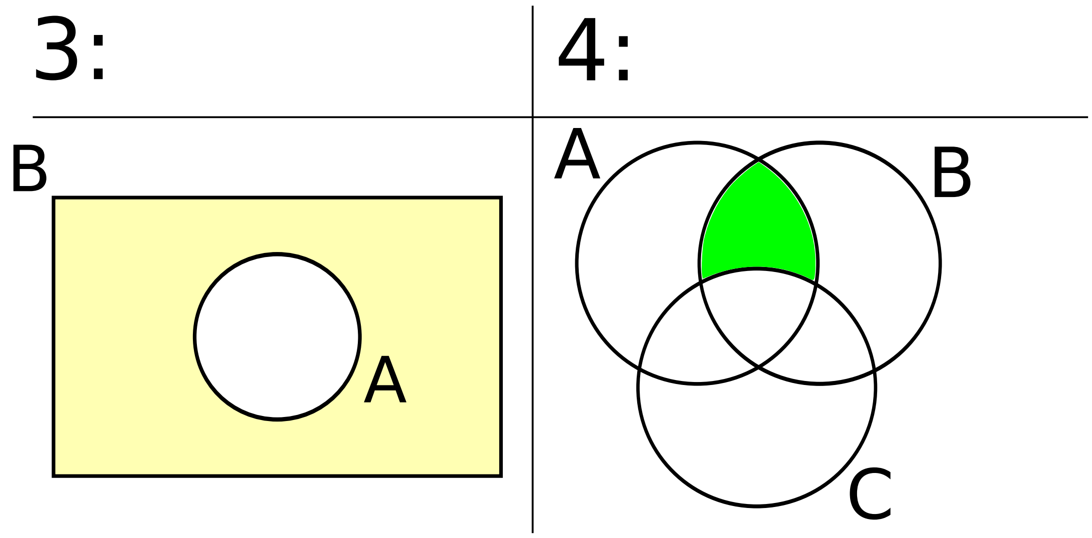
$\overline{\overline{H}} = H$

18.4 Mengendiagramme

(Venn / Euler-Diagramm)



1: $A \subseteq B$; 2: $A \cap B$ und $A \cup B$



3: $\overline{A}$; 4: $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

19 Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall, falls für $a, b \in I$ auch jedes $c, a < c < b$ in I ist.
D. h. auf dem Zahlenstrahl dargestellt ist ein Intervall ein Zusammenhängendes Gebiet.

Bezeichnung durch Zahlen am Rand, die entweder im Interval liegen [bzw.] oder nicht (bzw.)

Bsp.:
$[3; 5) = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 5\}$
$(3; 5) = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 5\}$

$\{1, 2, 3\}$ kein Intervall, denn $1,5 \notin \{1, 2, 3\}$
aber $1 \in \{1, 2, 3\}$

19.1 Unbegrenztes Intervall

$(-\infty; 5] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$
$(-3; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$

Intervalle sind Mengen

Bspe.:
$[1; 2] \subseteq [0; 3)$
$[1; 2] - (1; 2) = \{1; 2\}$
$[4; 4] \cap (2,5; 10) = (3,5; 4]$

Achtung: zwischen $\subseteq$ und $\in$ unterscheiden!

Bsp.: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
$\{1,2\} \notin \{1,2,3\}$

$\{1,2\} \nsubseteq \{\{1\},\{1,2\},\mathbb{Z}\}$

aber $\{1,2\} \in \{\{1\},\{1,2\},\mathbb{Z}\}$

20 (Un-)Gleichungen

Für die Ordnungsrelation $<$ („kleiner“) auf $\mathbb{R}$ gelten die folgenden Grundregeln

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der drei Fälle:
   $a < b, a = b, a > b$

2. Transivität
   $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

   Weitere Zeichen:
   $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$
   $a \geq b$
   $a > b$
   $a = b$

3. Monotonie der Addition
   $a < b = a + c < b + c$
   für jedes $c \in \mathbb{R}$

4. Monotonie der Multiplikation mit positiven Zahlen
   Für $a > 0$ gilt:
   $b > c \Rightarrow a \cdot b > a \cdot c$

Bemerkung 1: Für $<; \leq; >; \geq, =$ gelten die selben Gesetze für $=$ gilt 4. für jedes $a \in \mathbb{R}$

Bemerkung 2: (Einschub)
Implikation $A \Rightarrow B$
(Aus A folgt B, wenn A, dann B)
Bedeutet immer wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Bsp.:

x teilt $6 \Rightarrow a$ teilt 12
ist richtig, denn wenn $6 = a \cdot x$ für $a \in \mathbb{N}$, dann gilt $12 = 2 \cdot a \cdot x$, d. h. x teilt 12

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
gilt nicht, da $(-1)^2 = 1$, aber $-1 \neq 1$

$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
gilt

Man schreibt $A \Leftrightarrow B$ ($A \overbrace{\text{äquivalent}}^{\text{genau dann, wenn}} B$) gilt, falls $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

x ist gerade $Leftrightarrowx$ ist Differenz zweier ungerader Zahlen
Beweis:
„$\Rightarrow$" wenn x gerade ist, dann ist $x+1$ ungerade und $(x+1)-1$
„$\Leftarrow$" wenn x, y ungerade ist, dann gilt:
$x - y = x + 1 - (y - 1)$ für $Z_1, Z_2 \in \mathbb{Z}$
$= 2 \cdot Z_1 - 2 \cdot Z_2$
$2 \cdot (\underbrace{Z_1 - Z_2}_{\mathbb{Z}})$

$\Rightarrow x - y$ ist gerade.

Foglerungen

20.1 Umformungen von Ungleichungen

1. Addition: $b < c \Leftrightarrow a + b < a + c$

2. Multiplikation mit positiver Zahl ist Äquivalenzumformung:
   Für $a > 0$ gilt:
   $b < c \Leftrightarrow a \cdot b < a \cdot c$

3. Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht die Ungleichung:
   Für $a < 0$ gilt: $b < c \Leftrightarrow a \cdot b > a \cdot c$

4. Addition von Ungleichungen:
   $a < b$ und $c < d$
   $\Rightarrow a + c < b + d$

Beweis:

1. $b < c \Rightarrow b + a < c + a$ (Grundregeln)
   $b + a < c + a \qquad | + (-a)$
   $\Rightarrow b < c$

2. $a < c \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c \qquad (a > 0)$
   $\Leftarrow a \cdot < a \cdot c \qquad | \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$
   $\Rightarrow b < c$

3. $a < 0$
   $b < c \qquad | \cdot (-a) \qquad -a > 0$
   $\overset{2.}{\Leftrightarrow} -a \cdot b < -a \cdot c \qquad | + a \cdot b$
   $\overset{1.}{\Leftrightarrow} 0 < -a \cdot c + a \cdot b \qquad | + a \cdot c$

$\overset{1.}{\Leftrightarrow} a \cdot c < a \cdot b$

4. $a < b$ und $c < d$
   $\Rightarrow a + c < b + d$ und $c + b < d + b$
   Transivität
   $\Rightarrow a + c < b + c < b + d$
   $\Rightarrow a + c < d + b$

<u>Bspe.:</u>

$$\begin{array}{rcll} x+1 & < & -2x+3 & \mid +2x \\ 3x+1 & < & 3 & \mid -1 \\ 3x & < & 2 & \mid \cdot \frac{1}{3} \\ x & < & \frac{2}{3} & \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{x | x < \frac{2}{3}\} = (-\infty; \frac{2}{3}]$

<u>Bsp.:</u>
$x > 5$ und $5 > 3$

$\Rightarrow x + 5 > 5 + 3$
$\Rightarrow x + 5 > 8$
(also $x > 5 \Rightarrow x + 5 > 8$, aber nicht umgekehrt)

<u>Bsp.:</u>
$-\frac{1}{5} \cdot x < 2 \qquad | \cdot (-5)$
$\Leftrightarrow x > -10$

$\mathbb{L} = (-10; \infty)$

Vorsicht bei Multiplikationen mit Variablen Ausdrücken ergeben sich Unterschiedliche Fälle, je nachdem, ob der Ausdruck > 0 oder < 0 ist.
<u>Bsp.:</u> $\frac{1}{x} < 5 \qquad | \cdot x$

<u>Fall 1 $x > 0$:</u>
$1 < 5x \qquad | : 5$
$\frac{1}{5} < x$

$\mathbb{L}_1 = \{x | x > \frac{1}{5}\}$

<u>Fall 2 $x < 0$:</u>
$1 > 5x \qquad | : 5$
$\frac{1}{5} > x$

$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^-\}$

$\mathbb{L} = (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{5}; \infty)$

20.2 Gleichungen

Umformungsregeln entsprechend)

$$b = c \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$
$$b = c \Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot c \qquad \text{für } a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (1)$$

$b = c \Rightarrow a + b = a + c \qquad$ für $a \in \mathbb{R}$

(1) Multiplikation mit Variablem Ausdruck:
dieser darf nicht 0 werden

$a = b$ und $c = d$
$a + c = b + d$

$3 \cdot x + 3 = -5 \cdot x + 5$

$\Rightarrow 2 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 63 = 0$

1. Mitternachtsformel: $\qquad a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

   $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-63)}}{2 \cdot 2}$

   $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 504}}{4}$

   $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{729}}{4}$

   $x_{1,2} = \frac{15 \pm 27}{4}$

   $x_1 = \frac{21}{2} = 10,5$

   $x_2 = -3$

   $\mathbb{L} = \{\frac{21}{2}; -3\}$

2. $(2 \cdot (x - 10) - 1) \cdot (x + 3) = 0$

   $(2x - 21) \cdot (x + 3) = 0$

   $2 \cdot (x - 10,5) \cdot (x + 3) = 0$

Allgemein: Ein Produkt ist 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

Mehrere Faktoren:

$a \cdot b \cdot c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$

Beweis:

$(a \cdot b) \cdot c = 0$
$\Leftrightarrow (a \cdot b) = 0$ oder $c = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$

Aufsplittung quadratischer Polynome in Faktoren:

sind x_1, x_2 Lösungen von:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

dann gilt:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$
(Evtl. $x_1 = x_2$)

<u>Bsp.:</u>

$$\underbrace{(|x|+1)}_{>0} \cdot (\underbrace{x-1}_{0 \text{ für } x=1}) \cdot 2 \cdot \underbrace{x}_{0 \text{ für } x=0} \cdot 5 = 0$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{L} = \{0; 1\}$

21 Funktionen

Eine Funktion

$f\colon\ A \to B$ (von A nach B)

ordnet jedem Element $x \in A$ genau ein Element in $x \in B$ zu.

A heißt Definitionsbereich
B heißt Zielmenge/-Bereich

wird $x \in A$ das Element $y \in B$ zugeordnet, schreibt man auch

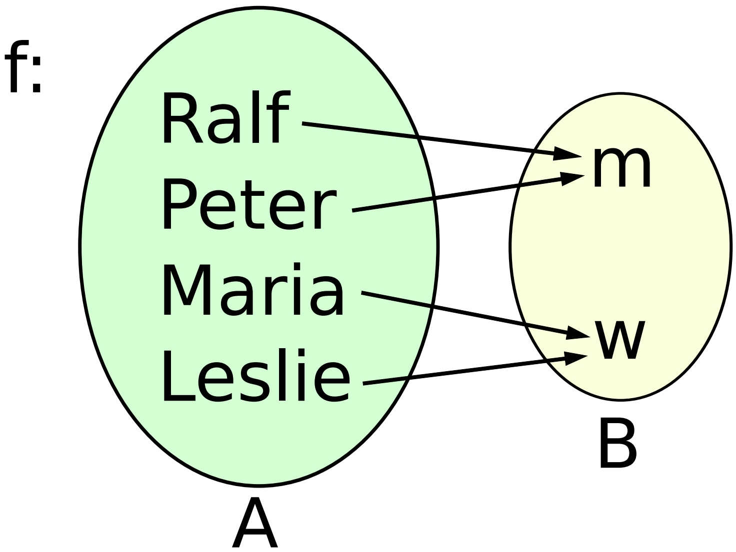
$y = f(x)$

oder

$f\colon\ x \to y$

oder Veranschaulicht z. B. mit einem Mengenbild

<u>Bsp.:</u>



$f\colon\ \{\text{Rafl}, \text{Peter}, \text{Maria}, \text{Leslie}\} \to \{\text{m}, \text{w}\}$

$f\colon$ Ralf $\to$ m

$f\colon$ Peter $\to$ m

$f\colon$ Maria $\to$ w

oder:

f(Ralf) $=$ m

f(Leslie) $=$ w

Vollständige Wertetabelle:

x	Ralf	Peter	Maria	Leslie
$f(x)$	m	m	w	w

Funktionen die Zahlen auf Zahlen abbilden werden gerne durch eine Berechnungsvorschrift angegeben.

$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

$f(x) = |\lceil x \rceil|$

z. B.: $f(1) = 1 \qquad f(-\frac{3}{2}) = 1$

2.

$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

z. B. $f(5) = 5, \qquad f(-5) = 0$

Bei funktionen in der Analysis
$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ergibt sich der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f)$ oft aus der Berechnungsvorschrift

Bspe.:

$f_{(x)} = \sqrt{x}$ $\qquad \mathbb{D}(f) = [0; \infty)$
$f_{(x)} = \frac{1}{1-x}$ $\qquad \mathbb{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
$f_{(x)} = \log_{10} x^3$ $\qquad \mathbb{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

21.1 Injektiv

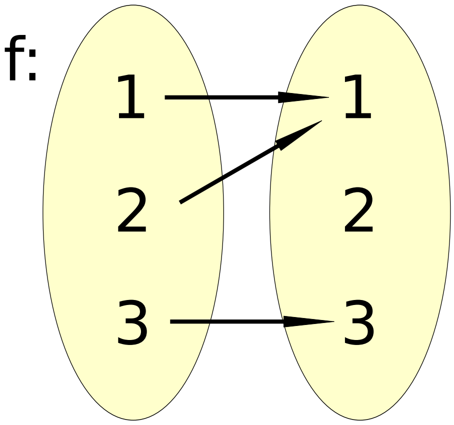
Eine Funktion $f\colon\ A \to B$ heißt Injektiv, falls

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Bzw. äquivalent ausgedrückt:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
für alle $x_1, x_2 \in A$ (Kontraposition)

Bspe.:



Nein, z. B.
$x_1 = 2; x_2 = 1$
$f(1) = f(2)$ aber $1 \neq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{W} &= \{f(1), f(2), f(3)\} \\ &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

$g\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$g(x) = 2 \cdot x - 3$

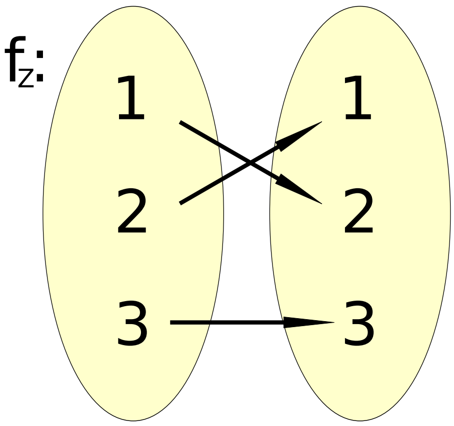
$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ 2 \cdot x_1 - 3 &= 2 \cdot x_2 - 3 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x_1 &= 2 \cdot x_2 && \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

d. h. injektiv $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} \text{Wertebereich } \mathbb{W}(g) &= \{f(x) | x \in A\} \\ f\colon\ A \to B &= \{-3, -1, 1, 3, ...\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -3 \text{ und } x \text{ ungerade}\} \end{aligned}$$

21.2 Surjektiv

Eine Funktion heißt Surjektiv, falls $\mathbb{W}(f) = B$



F_Z ist surjektiv und injektiv.

21.3 Bijektiv

Eine Funktion $f\colon\ A \mapsto B$ die surjektiv und bijektiv ist, ist <u>bijektiv</u>.
Eine bijektive Funktion $f\colon\ A \mapsto B$ hat eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon\ B \mapsto A$ mit

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

$f\colon\ \{1, 2, 3\} \mapsto \{1, 2, 3\}$